

# 自動車物理ノート

共振周波数	道路の段差	エンジンの振動	過渡応答計算	走る	まっすぐ進む	片持ち梁	単純支持梁	梁のたわみ
運動方程式の解き方	<b>振動</b>	2 質点モデル 3 質点モデル	曲がる ステア特性	<b>車両運動</b>	曲がる 横力の影響	不静定梁	<b>強度</b>	カマンの有効幅
伝達関数合成法	モード解析	自励振動 音場	曲がる 接地荷重の影響	止まる		断面の強度判定	門形ラーメン	終局耐力 終局荷重
運動エネルギーと仕事	拘束装置を活かす 車の変形荷重	車の慣性力	<b>振動</b>	<b>車両運動</b>	<b>強度</b>	相反定理	弾性主軸	カスチリアノ の第 2 定理
折りたたむ力学	<b>衝突</b>		<b>衝突</b>	<b>車</b>	<b>剛性</b>	相対変位の 確認方法	<b>剛性</b>	弾性主軸の 確認方法
			<b>燃費</b>	<b>人-機械</b>	<b>壊れ方</b>			
理想気体の状態方程式	比熱比	膨張する 気体の仕事	走る	曲がる	安定性	市場、テストコース コンポ、机上予測	断面の応力状態 のいろいろ	修正マイナー則
オートサイクルの熱効率	<b>燃費</b>	冷却損失	状態方程式	<b>人-機械</b>	H $\infty$ 制御	力線と応力集中	<b>壊れ方</b>	応力拡大係数 とパリス則
						ねじ締結	ゴム部品	

## 目次

---

1. 振動の式.....	2
1.1. 共振周波数.....	3
1.1.1. $F = ma$ ニュートンの運動の第2法則.....	4
1.1.2. $F = ma + kx$ 共振周波数.....	5
1.2. 道路の段差を乗り越える時の振動現象.....	7
1.2.1. フーリエ変換.....	8
1.2.2. フーリエ積分.....	13
1.2.3. 単位ステップ関数 $u(t)$ のフーリエ積分.....	15
1.2.4. フーリエ積分とラプラス変換.....	18
1.2.5. 運動方程式のラプラス変換.....	19
1.2.6. 道路の段差の解1 (ステップ入力).....	21
1.2.7. 道路の段差の解1 (ステップ入力) 補足.....	22
1.2.8. 道路の段差の解2 (ランプ入力).....	25
1.2.9. 減衰比 (ゼータ) $\zeta$ の意味.....	27
1.3. エンジンの振動現象.....	29
1.3.1. 伝達関数の考え方.....	30
1.3.2. 伝達関数の測定方法.....	31
1.3.3. エンジンの強制力 燃焼圧によるトルク変動.....	33
1.3.4. エンジンの強制力 ピストンの慣性力.....	33
1.3.5. 減衰を含む運動方程式の伝達関数の特徴1.....	35
1.3.6. 減衰を含む運動方程式の伝達関数の特徴2.....	38
1.4. 運動方程式の立て方、解き方.....	39
1.4.1. 運動方程式の立て方.....	39
1.4.2. 強制変位入力の与え方.....	40
1.4.3. 減衰を含む運動方程式の解き方.....	41
1.4.4. Excelを使った数値計算.....	42
1.4.5. 剛体の先についたばね その1.....	45
1.4.6. 剛体の先についたばね その2.....	49
1.4.7. 剛体の先についたばね その3.....	53
1.5. 2質点モデルと3質点モデル.....	55
1.5.1. 2質点モデルの防振効果「共振を下げる」.....	55
1.5.2. 2質点モデルの共振周波数 その1.....	58
1.5.3. 2質点モデルの防振効果.....	59
1.5.4. 2質点モデルの共振周波数 その2.....	61

1.5.5. 2 質点モデル 最適解 その1 .....	64
1.5.6. 2 質点モデル 最適解 その2 .....	65
1.5.7. 減衰を含む2 質点モデルの防振効果.....	67
1.5.8. 3 質点モデルの共振周波数.....	69
1.5.9. 3 質点モデルの伝達関数「共振を合わせる」 .....	72
1.6. 伝達関数合成法.....	73
1.6.1. 直列結合の考察「共振を離す」 .....	73
1.6.2. ダイナミックダンパーの考察 .....	75
1.6.3. ばね追加の考察.....	77
1.7. モード解析.....	79
1.7.1. 固有値と固有ベクトル.....	79
1.7.2. 剛性マトリクスの固有値解析 .....	81
1.7.3. 運動方程式の固有値解析 .....	83
1.7.4. モード解析における運動方程式の変位 .....	84
1.7.5. モード解析における伝達関数 .....	87
1.7.6. 運動方程式から固有モードを求める.....	88
1.7.7. 運動方程式の逆問題 固有モードの設定.....	89
2. 車両運動の式.....	92
2.1. 過渡応答計算 .....	93
2.1.1. 陰解法 ニューマークの $\beta$ 法 .....	94
2.1.2. 陽解法 オイラー法 .....	96
2.2. 走る.....	97
2.2.1. タイヤの摩擦円と荷重移動.....	97
2.2.2. 重心位置と前輪駆動車の加速性能 .....	98
2.2.3. 重心位置と後輪駆動車の加速性能 .....	99
2.2.4. 前輪駆動と後輪駆動の加速性能の差.....	100
2.2.5. 加速時の車両姿勢 アンチスクオート .....	101
2.2.6. 加速時の車両姿勢の計算 アンチスクオート.....	103
2.2.7. 減速時の車両姿勢の計算 アンチダイブ.....	106
2.2.8. 段差乗り越え時の車の動き .....	107
2.3. まっすぐ進む 直進性とステア特性 .....	111
2.3.1. タイヤの横力とコーナーリングフォース.....	111
2.3.2. セルフアライニングトルク .....	112
2.3.3. ニュートラルステアポイントNSP .....	113
2.3.4. スタティックマージンとステア特性.....	114
2.3.5. 車の重心位置とステア特性.....	115

2.3.6.	地上基準の車の運動方程式.....	117
2.3.7.	車のステア特性と直進性 式の考察.....	119
2.3.8.	段差乗り越え時の車の直進性の計算.....	123
2.4.	曲がる ステア特性とステアリング操作.....	127
2.4.1.	定常円旋回中の車のコーナーリングフォース.....	127
2.4.2.	ステア特性とステアリング操作.....	129
2.4.3.	一般的な車のステア特性とコーナーリング.....	133
2.4.4.	運動方程式の変換と遠心力 その1.....	135
2.4.5.	運動方程式の変換と遠心力 その2.....	137
2.4.6.	車基準の車の運動方程式.....	139
2.4.7.	車基準の車の運動方程式 定常円旋回.....	141
2.5.	曲がる 横力発生時のステア特性変化.....	143
2.5.1.	リンク機構と自由度.....	143
2.5.2.	サスペンションの専門用語.....	144
2.5.3.	横力コンプライアンスステアとトー角変化.....	145
2.5.4.	後輪の横力コンプライアンスステア.....	146
2.5.5.	前輪の横力コンプライアンスステア.....	146
2.6.	曲がる 接地荷重変化時のステア特性変化.....	147
2.6.1.	ロールステア (トー角変化).....	147
2.6.2.	ロールキャンバー (キャンバー角変化).....	149
2.6.3.	スカッフ変化.....	150
2.6.4.	内外輪の荷重移動とステア特性の変化.....	151
3.	強度の式.....	154
3.1.	片持ち梁.....	155
3.1.1.	片持ち梁に荷重 $F$ を加える場合.....	155
3.1.2.	片持ち梁にモーメント $M$ を加える場合.....	155
3.2.	単純支持梁.....	156
3.2.1.	単純支持梁に荷重 $F$ が加える場合.....	156
3.2.2.	単純支持梁に荷重 $F/2$ を2つ加える場合.....	157
3.2.3.	単純支持梁に荷重を2つ加える場合.....	158
3.3.	梁のたわみ.....	159
3.3.1.	梁のたわみの式.....	160
3.3.2.	片持ち梁のたわみ モーメント $M$ .....	162
3.3.3.	片持ち梁のたわみ 荷重 $F$ .....	163
3.3.4.	単純支持梁のたわみ 荷重 $F$ .....	164
3.4.	不静定梁.....	165

3.4.1.	ばねで支えられた片持ち梁	荷重 $F$	165
3.4.2.	ばねで支えられた片持ち梁	モーメント $M$	167
3.4.3.	両端固定梁	荷重 $F$	169
3.4.4.	両端固定梁	モーメント $M$	171
3.4.5.	門形ラーメン	その1	173
3.4.6.	門形ラーメン	その1 実際の構造	177
3.4.7.	門形ラーメン	その2	179
3.4.8.	門形ラーメン	その2 実際の構造	183
3.4.9.	門形ラーメン	その3	185
3.4.10.	門形ラーメン	その4	189
3.4.11.	矩形ラーメン	その1	193
3.5.	断面の強度判定	弾塑性境界の応力分布	195
3.5.1.	軸方向の応力分布		196
3.5.2.	ねじり方向の応力分布		197
3.5.3.	せん断方向の応力分布		197
3.5.4.	Von-Mises 応力と安全率		198
3.6.	断面の強度判定	全塑性の応力分布	201
3.6.1.	中立軸が断面に存在しない場合		202
3.6.2.	中立軸が図心を通る場合		203
3.6.3.	中立軸が図心からずれる場合		205
3.6.4.	近似的な全塑性の判定式		207
3.7.	ゴム部材の配置、耐久とボリュウム		209
3.7.1.	ユニット支持マウントに働く荷重		209
3.7.2.	サブフレーム支持マウントに働く荷重		210
4.	衝突の式		214
4.1.	運動エネルギーと仕事		215
4.1.1.	車の衝突のイメージ		216
4.1.2.	車の変形量 $s$ と人の客室内移動量 $d$		217
4.2.	拘束装置を活かす車の変形荷重		219
4.2.1.	2質点ばねマスの数値計算		220
4.2.2.	2質点ばねマスの数値計算結果		221
4.3.	車の慣性力		223
4.3.1.	反発係数		223
4.3.2.	斜めの斜面	速度の考え方	225
4.3.3.	斜めの斜面	慣性力の考え方	225
4.3.4.	$F = ma$ で考える車の衝突現象		227

5.	剛性の式.....	230
5.1.	相反定理（大局的な変形を抑える）.....	231
5.1.1.	ベティの相反定理 仕事の相反定理.....	231
5.1.2.	マクスウェルの相反定理 変位の相反定理.....	234
5.1.3.	変位の相反定理の活用 分布荷重.....	235
5.1.4.	変位の相反定理の活用 変位の大きい所を止める.....	235
5.2.	弾性主軸（変形のバランスをとる）.....	237
5.2.1.	変形のバランスを取る.....	237
5.2.2.	弾性主軸 簡単な計算例.....	238
5.3.	カステリアーノの第2定理（局所変形を抑える）.....	239
5.3.1.	カステリアーノの第2定理.....	239
5.3.2.	仕事とひずみエネルギー.....	241
5.3.3.	入力点の変位 並列ばねモデル.....	243
5.3.4.	入力点の変位 片持ち梁.....	243
5.3.5.	入力点の変位 単純支持梁.....	244
5.3.6.	入力点の変位 固定端梁.....	245
5.3.7.	入力点の変位 門形ラーメン.....	246
5.3.8.	入力点の変位 矩形ラーメン.....	249
6.	燃費の式.....	254
6.1.	分子の運動と $PV = nRT$ .....	255
6.1.1.	ニュートンの運動の第2法則.....	255
6.1.2.	気体の圧力と分子の運動量.....	256
6.1.3.	気体分子の温度と速度分布の関係.....	259
6.1.4.	理想気体の状態方程式.....	260
6.2.	比熱比 $\kappa$ と気体分子の自由度 $\alpha$ .....	261
6.2.1.	気体の内部エネルギーと気体分子の自由度 $\alpha$ .....	261
6.2.2.	定積モル熱容量 $C_v$ .....	263
6.2.3.	定圧モル熱容量 $C_p$ と比熱比 $\kappa$ .....	265
6.3.	膨張する気体の仕事.....	267
6.3.1.	自由膨張する気体の温度と圧力.....	268
6.3.2.	断熱膨張する気体の温度と圧力.....	269
6.3.3.	断熱膨張する気体の仕事.....	271
6.3.4.	断熱膨張時に、熱 $Q$ を加えたときの効率.....	273
6.4.	オットーサイクルの熱効率.....	275
6.4.1.	効率の良いピストンの押し方.....	275
6.4.2.	オットーサイクルの熱効率.....	276

7. 人 - 機械の式.....	280
7.1. 走る.....	281
7.1.1. 車の模式図 走る .....	282
7.1.2. 比例動作 .....	283
7.1.3. 積分動作 .....	286
7.1.4. 1次遅れ要素 .....	287
7.2. 曲がる .....	289
7.2.1. 位置のフィードバック .....	289
7.2.2. 前方の位置をフィードバック .....	291
7.2.3. 遅れに対する対応 .....	293



## まえがき

すごい人がいました。その人は博士でも教授でもないのですが、物理式を自分の手足のように扱い、ナビエストークスの式を物理法則に従って拡張し、流体力学と構造力学を組み合わせた液体封入マウントの式をつくったり、車両運動を論じるために、車の動きと、運転者の目線の変化からハンドルを操作するような車・人モデルを、機械力学と制御工学を組み合わせでつくったりしました。

どうやったらその域に達するのだろうか？ 分野の違う式と式を組み合わせで新しい式をつくるという行為は、物理現象を感覚的に理解し、また物理式の前提条件を深く理解していないとできないと思いました。

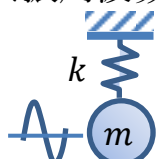
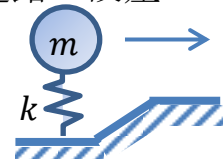
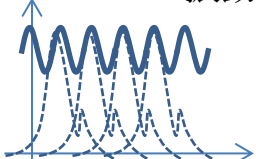

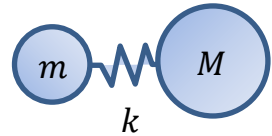
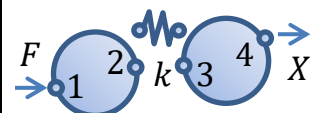
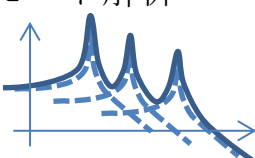
人の頭の中を覗くことはできないし、何かよい訓練方法はないかなと思ひ、とりあえず普段慣れ親しんでいる物理式の導出過程から、先人が、なぜこれこれを組み合わせようと思ったのか、ということを経験してみようと思ひました。

しばらく、紙に書き散らしながら格闘していましたが、せつかく「わかった！」と思っても、1月もすれば、記憶はあいまいになるし、紙はばらばらになるし、字も汚いしで、身に着いた感じもなかったもので、とりあえず自分なりに理解した手順を書き留めることにしました。

ただし、フーリエ変換などの難しい式の導出はできませんでした。言い訳すると、フーリエ自身もフーリエ変換の証明はちゃんとできず、後の数学者が証明したようです。また、 $F = ma$ のような、実験でどうやら確からしいとされる経験式についても、「なぜ $F = ma$ なのだろう」という深堀りはしていません。なんだ趣旨と違うじゃないか、ということは多分にあるかと思ひます。



## 1. 振動の式

共振周波数 	道路の段差 	エンジンの振動 
運動方程式の解法 $mx + cx + kx = f$ 	振動	2質点モデル 
伝達関数合成法 	モード解析 	自励振動

車の振動の原因は大きく2つあります。1つは路面の凸凹、もう1つはエンジンの燃焼圧による振動です。この物理ノートでは、始めに路面の凸凹による車の過渡的な振動現象、次にエンジンの燃焼圧による周期的な振動現象について整理したいと思います。

振動が難解に感じる原因として、時と場合に応じて

作戦1 共振を離す（基本）

作戦2 共振を合わせる（ダイナミックダンパー）

作戦3 共振を下げる（剛性低く）

作戦4 共振を上げる（剛性高く）

といった、一見矛盾する方策が行われることがあると思います。専門家と話をしても、「言ってることが前と違う？」「その答えが本当にベストか？」

「本当？」と思うことがあるのではないのでしょうか。

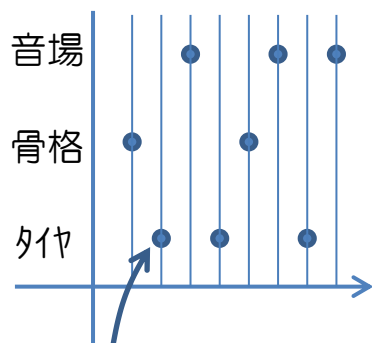
まず、基本は「共振を離す」です。「共振を離す」為に「共振を上げ」たり「共振を下げ」たりします。剛性を $\infty$ に出来れば共振が起きなくなるため「共振を上げ」ることは定性的に良い方向ですが、実際の構造を考えると「共振を下げる」場合もあります。

一方、ゴムで防振している場合は、ゴムが柔らかいほど防振効果が高いため、ゴムを柔らかくして「共振を下げる」ことが重要となります。また、ダイナミックダンパーを用いる場合は、ダイナミックダンパーの共振を問題の共振に合わせて振動を抑制します。

## 1.1. 共振周波数

構造特有の振動しやすい周波数では、小さな力でも大きく振動し振動騒音の問題となります。これは構造物の共振現象として知られ、共振する周波数を共振周波数 (resonance frequency)、固有振動数 (eigen frequency)、固有値(eigen value)などと呼びます。単に共振と言う場合もあります。

共振の分散配置が重要



静かな車づくりは、路面やエンジンの力に対して、車が振動しづらいように、車の共振周波数を互いに離して配置することから始まります。車の部品の共振周波数が重ならないように計画し、それを実現する構造を設計します。

ですから、振動騒音の問題が起こると、よく「何の共振？」というやり取りが行われます。「何の共振？」の意味するところは「その共振を決めている質量とばねは何だ？」という意味です。それがわかれば、何を軽く、あるいは重く、または何を硬く、あるいは柔らかくすればよいかわかります。

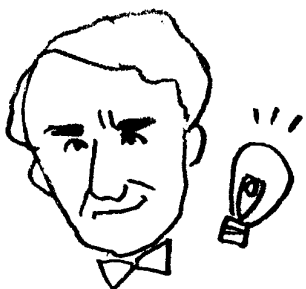
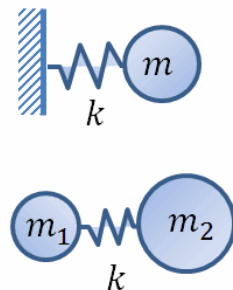
その際、どんなに複雑な構造でも、まずは1つのばねと質量 (以下1つのばねマスと言います) に置き換えて考えることが、エンジニアの知恵です。1つのばねマスで説明できる問題は、万人が理解することができます。100人の開発メンバーで、「それは事実だ、解決しよう」という意識を共有できます。

共振を決めている  
ばね $k$ と  
質量 $m$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$



置き換えて  
・考える  
・説明する



トーマス・エジソン

私は実験において、失敗は一度たりともしていない。これでは電球は光らないという発見をいままでに、2万回してきたのだ。

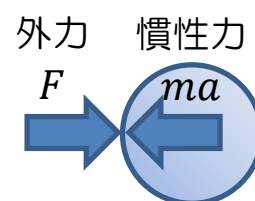
### 1.1.1. $F = ma$ ニュートンの運動の第2法則

$$F = ma \quad (1.1)$$

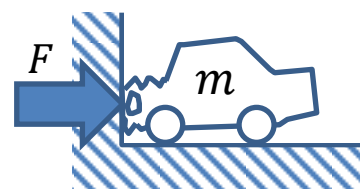
車の振動を考えるための準備として、まずはニュートンの運動の第2法則から始めます。

さて、この式の意味することは何でしょうか？ 「エフ、イコール、エム、エー」イコールで結ばれているので、左辺と右辺は同じ単位になるはずですが、左辺は力[N]ですから、右辺も力[N]です。この右辺の力は慣性力(inertia force)と呼ばれる力です。

慣性力は、「力」と名がつくぐらいですから、力 $F$ と同じ振る舞いをします。例えば、質量 $m$ の車が壁にぶつかり加速度 $a$ で減速している状態は、この慣性力 $ma$ が車を壁に押しつけ、その壁の反力が $F$ と考えることができます。「慣性力が車を壁に押しつける」という考え方は、「衝突の式」で具体的に述べます。



$$\text{加速度 } a = \frac{F}{m}$$

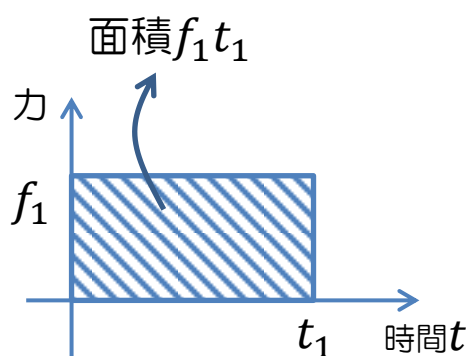
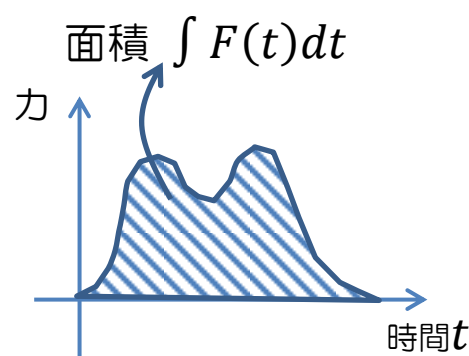


例えば、車を一定の駆動力 $F$ で加速するときの車の速度 $v$ は、上式の加速度 $a$ を運動量 $mv$ の微分で表し、1回積分することで求められます。

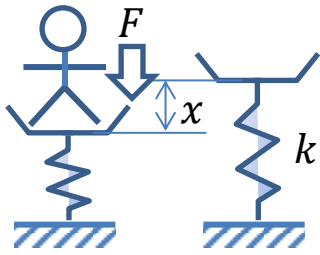
$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt} \quad (1.2)$$

$$\int F(t)dt = mv$$

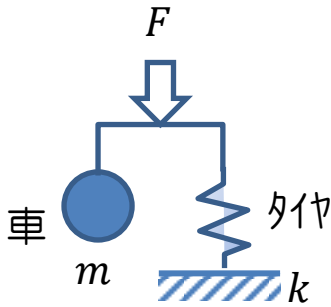
上式の左辺は、下図のように、力 $F(t)$ の時間推移を横軸時間 $t$ のグラフで表したときの斜線部の面積であり、これを力積と呼びます。



### 1.1.2. $F = ma + kx$ 共振周波数



$$F = kx$$



$$F = ma + kx$$

次に、重量 $F$ の人が車に乗り込む場合を考えてみます。まずは、人の重量 $F$ がばね定数 $k$ のタイヤに加わった時のタイヤのたわみ $x$ を考えます。力のつり合いより

$$F = kx \quad (1.3)$$

フックの法則(Hooke's law)ですね。人の重さでタイヤは $F/k$ だけたわみます。

次に、タイヤに支えられた質量 $m$ の車も考慮します。車は多少揺れて車に慣性力 $ma$ が生じると考えれば

$$F = ma + kx \quad (1.4)$$

となります。上式の右辺を眺めると、式(1.3)に比べて車が慣性力 $ma$ を持つ分だけ、ばねの変位 $x$ は $F/k$ より小さくなるように思われます。しかし、 $ma$ 、 $kx$ ともに正負の値を取り得ると考えれば、例えば、慣性力 $ma = \infty + F$ 、ばねの反力 $kx = -\infty$ でも式は成り立ちそうです。果たしてどうなるか、式を解いてみます。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F \quad (1.5)$$

ここで、 $kx$ を含む微分方程式から $x$ を求める方法が必要です。どう求めるのでしょうか？ 式(1.2)と同様に積分でしょうか？ !いえ、積分ではなく未定係数法(method of undetermined coefficients)と呼ばれる方法を使います。この解き方は、例えば移項を使わないで $x + 3 = 8$ の $x = 5$ を当ててるのに似ています。頭の中で「 $x = 1, 2, \dots$ 、答えは5ですね」という具合です。

式(1.5)を観察してみます。 $x$ を2回微分し、 $m$ を乗じて $kx$ を足すと、定数 $F$ になる $x$ は何でしょう？ という問題です。答えを試行錯誤しながら考えます。例えば、 $x = F/k$ はどうでしょうか。上式に代入すると

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{F}{k} \right) + k \left( \frac{F}{k} \right) = F \quad (1.6)$$

$$0 + F = F$$

左辺=右辺となるので、当たりですね。これは、力 $F$ の全てがばねの反力 $kx$ とつり合った状態です。

次に、きっと車は  $x = F/k$  の位置を中心に振動するだろう、と考え

$$x = A \sin \omega t + \frac{F}{k} \quad (1.7)$$

を試します。ここで  $A$  は未定係数です。また、上式の2回微分は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t \quad (1.8)$$

です。

上式と式(1.7)を運動方程式(1.5)に代入すると

$$m(-A\omega^2 \sin \omega t) + k(A \sin \omega t + \frac{F}{k}) = F \quad (1.9)$$

$$A \sin \omega t(-m\omega^2 + k) + F = F$$

$$A \sin \omega t(-m\omega^2 + k) = 0$$

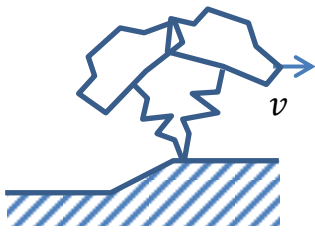
となり、上式を満たす答えとして  $A = 0$ 、 $\omega = 0$ 、 $\omega = \sqrt{k/m}$  (共振周波数) が得られます。いま興味があるのは振動する答えであるため、 $\omega = \sqrt{k/m}$  を式(1.7)に代入し、振動する答え

$$x = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{F}{k} \quad (1.10)$$

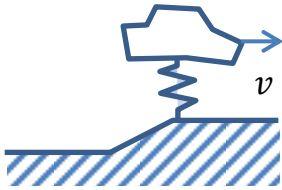
を得ます。さて、振幅  $A$  が未知数のまま残ってしまいました。これは何を意味するのでしょうか？ 事実、振幅  $A$  がどのような値であっても、運動方程式(1.5)を満たします。

未知数  $A$  を解くためには、物体に力  $F$  を加えるときの時間推移  $F(t)$  を考える必要があります。例えば、車が揺れないように慎重に乗り込めば車は振動しない ( $A = 0$ ) でしょう。反対に、勢いよく乗り込んだら大きく振動するでしょう。次節では、力の加え方  $F(t)$  によって振幅  $A$  が変化することを詳しく見ていきます。

よく揺れる



あまり揺れない



段差



タイヤ

サスペンション

骨格

フロア

空気



## 1.2. 道路の段差を乗り越える時の振動現象

自動車の振動現象の1つとして、道路の段差を乗り越える時の車の振動を考えます。質量 $m$ 、タイヤのばね定数 $k$ の車が、段差を乗り越える場合、段差の傾きによって大きく振動したり、全く振動しなかったりということが起こります。これは、「車の共振に対して、揺れにくい力の加え方がある」ということを示しています。

さて、道路から入ってくる力は、まずタイヤやサスペンションを揺らし、それらの共振周波数で大きく振動します。この状況を「共振が励起される」と表現します。共振によって増幅された力は、それを支える骨格構造を伝わり、車のフロアを揺らし、フロアがキャビンの空気を押すことで音になります。タイヤやサスペンションの共振以外にも、車両骨格の共振、フロアの共振、室内の空気の共鳴周波数と、車は共振の塊です。共振では力が増幅されて伝わるため、これらの共振を互いに離して配置することが大切です。

この節では、道路の段差の傾きによって車が振動したり、しなかったりするメカニズムを考えたいと思います。始めに道路の段差による力を図（欄外左下）のように時間0で瞬時に1となる関数で考えていきます。

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad (1.11)$$

このような関数は単位ステップ関数と呼ばれ、単位ステップ入力をばねマスモデルに与える運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = u(t) \quad (1.12)$$

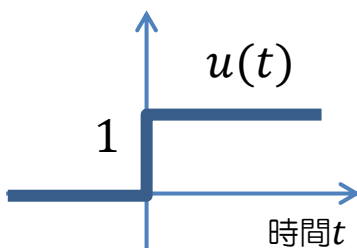
と書き表します。

ただし、上式の単位ステップ関数 $u(t)$ は不連続な関数であるため、数学で習う式変形のルールをそのまま当てはめて解くことができません。上式を解くには、

1. 道路の段差 $u(t)$ を連続な関数に表し
2. 微分方程式を解く

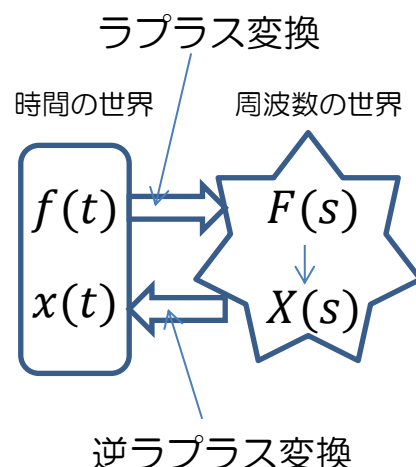
必要があります。

単位ステップ関数



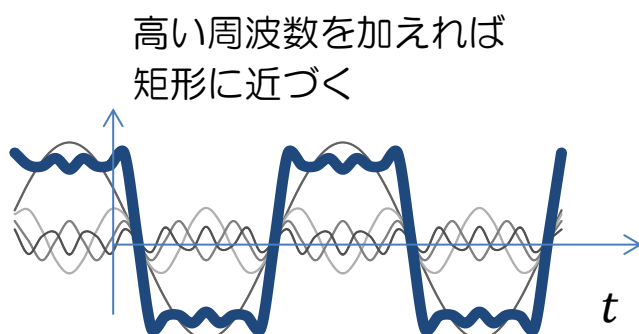
この節では、式(1.12)のような複雑な微分方程式を解くための、ラプラス変換(Laplace transform)という便利な道具の成り立ちについて整理したいと思います。

ラプラス変換を使った解法では、微分方程式を時間 $t$ の世界から周波数 $s$ の世界に変換し、周波数 $s$ の世界で微分方程式を解いた後、元の世界に戻して答えを求めます。少し長い道のりですが、ラプラス変換の基礎となるフーリエ変換から順に考えていきます。



### 1.2.1. フーリエ変換

フーリエ変換(Fourier transform)を使えば、周期的で不連続な関数を、連続な関数  $\sin$ 、 $\cos$  に分解して表すことができます。例えば、下図の細線の重ね合わせは、太線のような波形となり、高い周波数を重ね合わせるほど、矩形に近づきます。



フーリエ変換のアイデアは、フーリエが「周期的な関数は全て波で表せる、あるいは近似できる」と強く信じることから始まったと思います。

フーリエ本人は数学的に厳密な証明を行っていないという逸話もあるため、おそらく彼は、「全ては波であるはずだ」⇒「もし波であるならば、その波の強さを取り出す方法があるはずだ」⇒「取り出す方法を適用したらうまくいった！」という感じでたどり着いたのではないのでしょうか。



フーリエがどのようにして波の強さを取り出す方法に至ったかは定かではありませんが、フーリエは周期関数同士の掛け算の1周期の区間の積分が0または $\pi$ になることを利用して、波の強さを取り出す素晴らしい方法を見出しました。その方法とは、例えば既知の周期関数

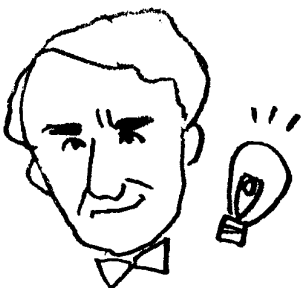
$$f(t) = 3\sin t + 2\sin 2t + \sin 3t \quad (1.13)$$

の第1項から3項までの周期関数の係数3,2,1を取り出すために、関数 $f(t)$ に $\sin$ 、 $\cos$ をかけて積分する方法です。なぜ、それでできるのか？ フーリエ変換の仕組みを確認したいと思います。始めに、周期関数同士の掛け算の積分の特徴を整理します。

1) 異なる周期の掛け算は0 ( $m, n$ は自然数)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m-n)t - \cos(m+n)t\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)t}{m-n} - \frac{\sin(m+n)t}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \{(0-0) - (0-0)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m+n)t + \cos(m-n)t\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m+n)t}{m+n} + \frac{\sin(m-n)t}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \{(0+0) - (0+0)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$



トーマス・エジソン  
メモこそ命の恩人だ。

2) 同じ周期の掛け算は $\pi$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin mt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 0 - \cos 2mt\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ t - \frac{\sin 2mt}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \{(\pi - 0) - (0 - \pi)\} = \pi \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos mt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 2mt + \cos 0\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 2mt}{2m} + t \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \{(0 + \pi) - (0 - \pi)\} = \pi \end{aligned} \quad (1.17)$$

3)  $\sin$  と  $\cos$  の掛け算は 0

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \cos nt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\sin(m+n)t + \sin(m-n)t\} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(m+n)t}{m+n} - \frac{\cos(m-n)t}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( -\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} \right) - \left( -\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

従って、次式のように $\sin \omega t$ の周期 $\omega$ を変えながら積分を行えば、式(1.13)の $f(t)$ の第1項から3項までの係数を取り出すことができます。

$$\begin{aligned} \omega = 1 \quad & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t \, dt = 3 \\ \omega = 2 \quad & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 2t \, dt = 2 \\ \omega = 3 \quad & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 3t \, dt = 1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

ここでは、既に答えが分かっている周期関数を例に、各項の係数の取り出し方を説明しましたが、任意の関数 $f(t)$ に対してフーリエ変換を行えば、関数 $f(t)$ を周波数 $\omega$ の周期関数と振幅レベルに変換することができます。

フーリエ変換は一般に次のように表されます。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right) \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.21)$$

式(1.21)によって関数 $f(t)$ に含まれる周期関数の振幅レベル $a_n$ 、 $b_n$ を取り出し、式(1.20)のような周期関数の重ね合わせで表すことができます。上式の $2L$ は関数 $f(t)$ を周期関数と見なしたときの周期を表します。

また、次に示すオイラーの公式

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \quad (1.22)$$

を式(1.20)に代入し複素数の形で表すと

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{in\pi t/L} + e^{-in\pi t/L}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi t/L} - e^{-in\pi t/L}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{in\pi t/L} + e^{-in\pi t/L}}{2} + ib_n \frac{e^{in\pi t/L} - e^{-in\pi t/L}}{-2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi t/L} + \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi t/L} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

となります。ここで

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= c_0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2} &= c_{-n} \\ \frac{a_n - ib_n}{2} &= c_n \end{aligned} \quad (1.24)$$

とし、式(1.23)を置き換えると

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi t/L} + \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi t/L} \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} e^{-in\pi t/L} + c_n e^{in\pi t/L}) \\
&= c_0 e^0 + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\pi t/L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

と表現できます。また、各周期関数の振幅レベル $c_n$ は

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt - i \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt \right\} \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left( \cos \frac{n\pi}{L} t - i \sin \frac{n\pi}{L} t \right) dt \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\pi t/L} dt
\end{aligned} \tag{1.26}$$

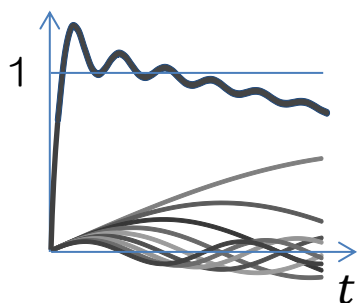
と表されます。

以上より、フーリエ変換の複素数の表現は

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L} \\
c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\pi t/L} dt
\end{aligned} \tag{1.27}$$

となります。上式の $e^{-in\pi t/L}$ は1文字で $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の変換を同時に処理する記号であると考えておけばよいでしょう。物理ノートでは利便性のために、以降はフーリエ変換を複素数の形で表します。

### 1.2.2. フーリエ積分



フーリエ変換によって変換した周期関数は、高い周波数の周期関数を重ねるほど、実際の関数に近づきます。従って、限りなく細かい刻み幅で周波数 $0 \sim \infty$ のフーリエ変換を行えば完全に一致させることができる、というアイデアがフーリエ積分(fourier integral)の考え方です。

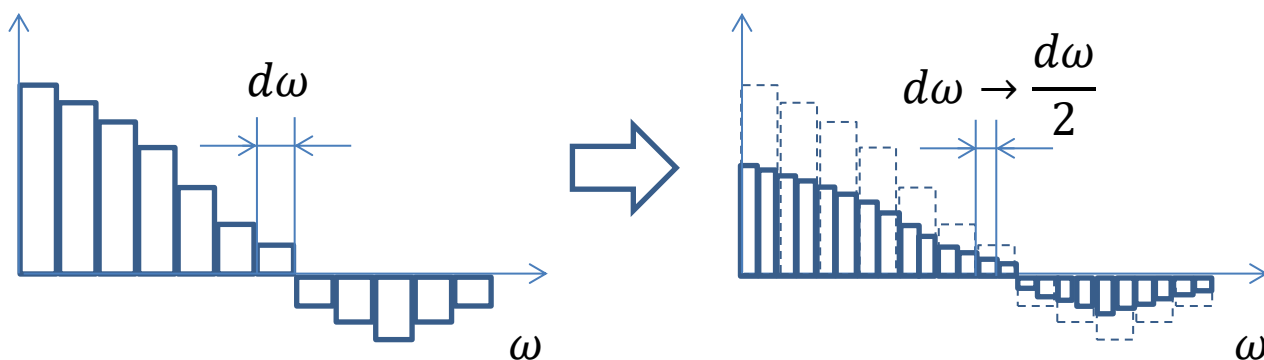
始めに、フーリエ変換の特徴を押さえておきます。基準となる周期関数の角速度(rad / sec)を $d\omega = \pi/L$ として、式(1.27)を置き換えると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} \quad (1.28)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} dt$$

となります。ここで、限りなく細かい周波数刻みでフーリエ変換を行う手段として、上式の $d\omega$ を $d\omega \rightarrow 0$ とする方法が考えられます。このとき、周期 $L$ は $d\omega = \pi/L$ の関係から $L \rightarrow \infty$ となるため、非周期的な関数も近似的に変換できることが期待できます。

式(1.28)の2行目の $1/2L$ から分かるように、フーリエ変換の周期 $L$ が大きくなる時、 $c_n$ の値は小さくなります。これは、例えば下図のように、周波数の刻み $d\omega$ を半分 ( $L$ は2倍) になったときの $c_n$ の値は、元々1つの周期関数で表していたものを、周波数の近い2つの周期関数の和で表すことになるため、振幅はおおよそ半分になります。



さて、それではフーリエ変換からフーリエ積分への拡張を行います。式(1.28)の2行目を1行目に代入すれば

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} dt \right\} e^{i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} \quad (1.29) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L f(t) e^{-i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} dt \right\} \frac{\pi}{L} e^{i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} \end{aligned}$$

です。上式の $\pi/L$ を $d\omega$ に置き換えると

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L f(t) e^{-i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} dt \right\} d\omega \cdot e^{i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} \quad (1.30)$$

となります。ここで、上式をフーリエ積分に拡張するために $d\omega \rightarrow 0$ 、すなわち周期 $L \rightarrow \infty$ とすることを考えます。離散値である $n \cdot d\omega$ は連続値になるため $n \cdot d\omega \rightarrow \omega$ と置きかえられます。同様に $\sum \rightarrow \int$ となるため、上式は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad (1.31)$$

となります。ここで

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.32)$$

と定義し、式(1.31)に代入すれば

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.33)$$

となります。以上、フーリエ変換に対応するフーリエ積分の式を整理すると

フーリエ変換	フーリエ積分	
$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot d\omega \cdot t}$	$\rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$	(1.34)
$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \cdot n \cdot d\omega \cdot t} dt$	$\rightarrow g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	

となります。この項でのフーリエ積分の導出は、C・R・ワイリー著の「工業数学 上」の内容を参考にしました。

### 1.2.3. 単位ステップ関数 $u(t)$ のフーリエ積分

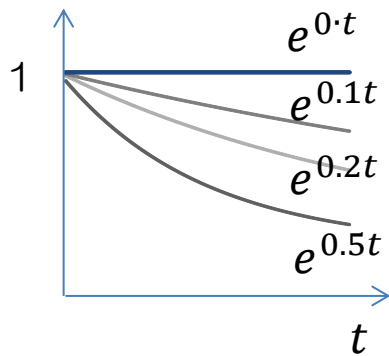
それでは、フーリエ積分を使って単位ステップ関数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \quad (1.35)$$

を周期関数に変換してみます。上式を式(1.32)に代入し

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{i\omega} \end{aligned} \quad (1.36)$$

となります。上式が単位ステップ関数  $u(t)$  の  $\omega$  毎の振幅レベルです。複素数  $i$  がついて納得しづらいかもしれませんが、ちゃんと周期関数に変換できているのを確かめるために、 $f(t)$  を確認してみます。ここからしばらくは、少し煩雑な計算になるため、式(1.48)まで飛ばしてもかまいません。



$f(t)$  を求めるために、式(1.36)を式(1.33)に代入したいところですが、途中で計算を進めることができなくなります。ここでは数学的なテクニックとして単位ステップ関数  $u(t)$  を

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} & (t > 0) \end{cases} \quad (1.37)$$

と表し、傾合いをみて  $a \rightarrow 0$  とすることを考えます。改めて上式を式(1.32)の  $f(t)$  に代入し計算を行えば

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_0^{\infty} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned} \quad (1.38)$$

となります。次に上式を式(1.33)に代入し、 $f(t)$ を求めます。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{a + i\omega} d\omega \end{aligned} \quad (1.39)$$

ここで、上式にオイラーの公式 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ を代入し

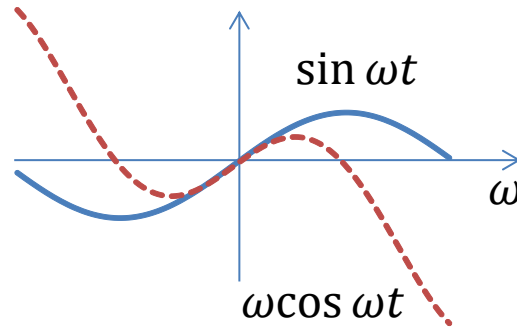
$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t + i \sin \omega t}{a + i\omega} \cdot \frac{a - i\omega}{a - i\omega} d\omega \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + i(a \sin \omega t - \omega \cos \omega t)}{a^2 + \omega^2} d\omega \quad (1.40) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{a \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} + i \frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} \right\} d\omega \end{aligned}$$

とします。非常に煩雑な式ですが、実部と虚部の計算を別々に進めていきます。実部は偶関数であるため

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{a \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega \quad (1.41)$$

となります。また、虚部は奇関数であるため、 $\omega = -\infty \sim \infty$ の積分は0になります。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = 0 \quad (1.42)$$



従って、式(1.40)は次のように書き換えられます。

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{a^2 + \omega^2} d\omega + 0 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

ここで置換積分を行うために $\omega = az$ と、その微分

$$\frac{d\omega}{dz} = a \quad (1.44)$$

を式(1.43)の第1項に代入すると



$$\begin{aligned}
 f(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a \cos azt}{a^2 + (az)^2} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega \right\} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a \cos azt}{a^2 + (az)^2} (adz) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega \right\} \quad (1.45) \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos azt}{1 + z^2} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega \right\}
 \end{aligned}$$

と置きかえられます。ここで、上式の $\lim$ の $a$ を $0$ に近づけると

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{\omega^2} d\omega \quad (1.46)$$

となります。上式の第1項は積分の公式より $\tan^{-1} z$ です。従って上式は

$$f(t) = \frac{1}{\pi} [\tan^{-1} z]_0^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (1.47)$$

となります。さらに上式の $\tan^{-1} z$ は図(欄外)のように $z = \infty$ で $\pi/2$ 、 $z = 0$ で $0$ の値となる関数であるため、その定積分は

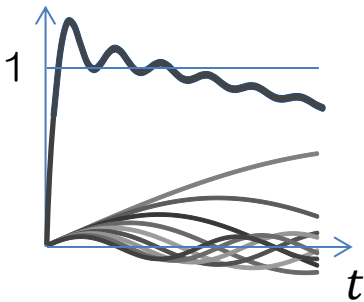
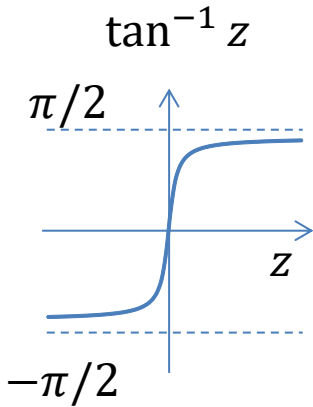
$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (1.48) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega
 \end{aligned}$$

となり、単位ステップ関数 $u(t)$ と等価な周期関数が得られます。ここで、上式の第2項の積分は周波数 $\omega = 0 \sim \infty$ の周期関数の集まりです。 $\omega$ が大きいほど振幅レベルが低くなる図(欄外)のような周波関数の重ね合わせです。

Excelなどで確認するとわかるのですが、上式の第2項を高い周波数まで細かく重ね合わせると、単位ステップ関数 $u(t)$ を表せていることが分かります。

さて本節では、先に示した運動方程式(1.12)を解くために、単位ステップ関数 $u(t)$ を連続的な関数に置き換える手順を確認しました。一方で、「運動方程式を解く」ために必要な情報は、式(1.48)の周期関数の振幅レベルの係数 $1/\omega$ だけです。

次項では、フーリエ積分を少しアレンジして、係数 $1/\omega$ を単純かつ、機械的に取り出す方法、ラプラス変換について考えます。



### 1.2.4. フーリエ積分とラプラス変換

ラプラス変換を用いれば、運動方程式を解くために必要は情報、例えば単位ステップ関数 $u(t)$ の場合は式(1.48)の $1/\omega$ を簡単に求めることができます。

さて、フーリエ積分の式

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.49)$$

は積分区間が $-\infty \sim \infty$ であるため、関数 $f(t)$ によっては積分値が $\infty$ となり振幅レベルが求められない場合があります。そこで、上式が必ず有限となるための工夫として、関数 $f(t)$ に右肩下がりの関数 $e^{-\sigma t}$ を乗じ、 $t = \infty$ で必ず $f(t)e^{-\sigma t} = 0$ となるような次式に置き換えます。

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (1.50)$$

しかし、まだ十分ではありません。 $e^{-\sigma t}$ は右肩下がり、左肩上がりの式なので、 $-\infty \sim 0$ の積分値が $\infty$ となります。そこで $u(t)$ を利用します。 $u(t)$ を $f(t)$ に乗ずることで、 $-\infty \sim 0$ の範囲の積分を0にすることができます。

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)f(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (1.51)$$

結果として、任意の関数 $f(t)$ を $f(t) \rightarrow u(t)f(t)e^{-\sigma t}$ に置き換えたフーリエ積分を行います。上式の $e$ の乗数を整理し

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \quad (1.52)$$

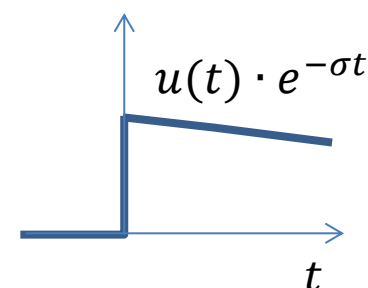
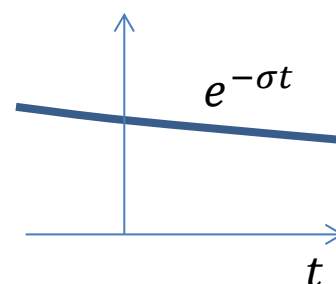
となります。上式の積分は $u(t)$ の影響で、 $-\infty \sim 0$ の積分値が必ず0になるため

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \quad (1.53)$$

と書き換えられます。最後に $\sigma + i\omega = s$ と置き換えた

$$g(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.54)$$

がラプラス変換の一般式です。ラプラス変換により変換された関数は $\mathcal{L}\{f(t)\}$ と表します。ここまでの過程からわかるように、ラプラス変換は、関数 $f(t)$ に $u(t)$ と $e^{-\sigma t}$ を乗じた特別なフーリエ積分です。



### 1.2.5. 運動方程式のラプラス変換

それでは、式(1.54)を用いて運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (1.55)$$

のラプラス変換を行います。始めに上式の右辺の単位ステップ関数 $u(t)$ を式(1.54)を使ってラプラス変換します。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{-s} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (1.56)$$

上式の $s$ は $\sigma + i\omega$ であるため、式(1.48)の周期関数の振幅レベルの係数 $1/\omega$ を情報として含んでいることがわかります。

次に左辺のラプラス変換を行います。 $kx(t)$ のラプラス変換は

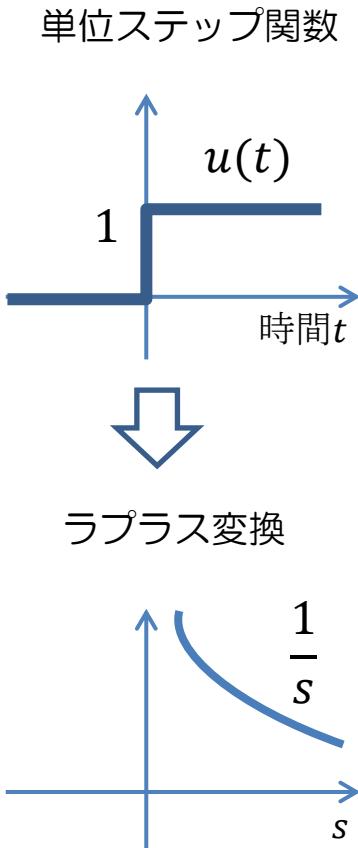
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{kx(t)\} &= \int_0^{\infty} kx(t)e^{-st} dt \\ &= k \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= k \mathcal{L}\{x(t)\} \end{aligned} \quad (1.57)$$

から単に $k\mathcal{L}\{x\}$ と変換されます。

最後に $\ddot{x}(t)$ のラプラス変換です。まず始めに部分積分法の公式

$$\int_a^b \dot{x}(t)y(t)dt = [x(t)y(t)]_a^b - \int_a^b x(t)\dot{y}(t)dt \quad (1.58)$$

を利用し、 $\dot{x}(t)$ のラプラス変換を次のように計算します。



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt \\
&= [x(t)e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt \\
&= 0 - x(0) + s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\
&= s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0)
\end{aligned} \tag{1.59}$$

同様に、 $\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}$ も次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} &= \int_0^{\infty} \ddot{x}(t)e^{-st} dt \\
&= [\dot{x}(t)e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \dot{x}(t)(-s)e^{-st} dt \\
&= 0 - \dot{x}(0) + s \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt \\
&= 0 - \dot{x}(0) + s\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} \\
&= -\dot{x}(0) + s\{s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0)\} \\
&= s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0)
\end{aligned} \tag{1.60}$$

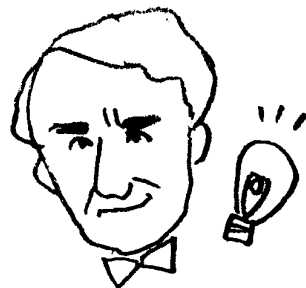
さて、今解こうとしている運動方程式(1.55)は、初期に静止している車に単位ステップ入力を加える場合なので、初期値 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ です。これを上式に代入すれば

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} \tag{1.61}$$

となります。以上より運動方程式(1.55)のラプラス変換は、式(1.56)、(1.57)、(1.61)から次のように変換されます。

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(ms^2 + k) = \frac{1}{s} \tag{1.62}$$

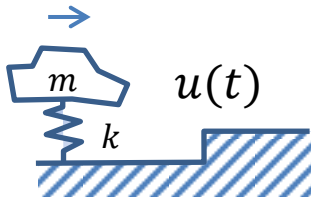
その他いろいろな関数のラプラス変換はアペンドックスを参照ください。



#### トーマス・エジソン

ほとんどすべての人間は、もうこれ以上アイデアを考えるのは不可能というところまで行きつき、そこでやる気をなくしてしまう。いよいよこれからだというのに。

### 1.2.6. 道路の段差の解 1 (ステップ入力)



ようやく式(1.12)を解く準備が整いました。図(欄外)のように、ばねで支えられた車に対し、地面の強制的な変位が単位ステップ関数 $u(t)$ で与えられる問題です。質点に働く力は、ばねのたわみ量とばね定数 $k$ の積となるため、式(1.12)を少し修正して

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k\{u(t) - x\} \quad (1.63)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = ku(t)$$

とし、ラプラス変換を使って解いていきます。繰り返しになりますが、ラプラス変換を使った解法では、運動方程式を時間 $t$ の世界から周波数 $s$ の世界に変換し、周波数の世界で式を解き、再び時間の世界に戻します。

上式のラプラス変換は、式(1.62)より

$$\mathcal{L}\{x\}(ms^2 + k) = k \cdot \frac{1}{s} \quad (1.64)$$

となります。従って、上式を変形し $\mathcal{L}\{x\}$ は

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{k}{s(ms^2 + k)} \quad (1.65)$$

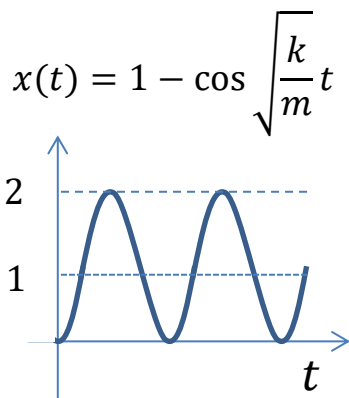
と求まります。ここで、上式を元の時間の世界に戻すために、逆変換しやすい形に書き換えます。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \frac{1}{s} - \frac{ms}{ms^2 + k} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + k/m} \end{aligned} \quad (1.66)$$

この操作を、部分分数分解(partial fraction decomposition)と呼びます。上式を逆変換(アペンディックスを参照)し、 $x$ は次のように求められます。

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x\}\} = x = 1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (1.67)$$

上式より、ステップ入力 $ku(t)$ を加えた場合、静的に押した場合の変位1だけでなく、振動による変位も生じるため、最大で2倍の変位、2倍のばね反力が発生することがわかります。



### 1.2.7. 道路の段差の解 1 (ステップ入力) 補足

ステップ入力のような瞬間的に立ち上がる力で、なぜ2倍の変位が発生するのか、少しわかりづらいと思いますので、図(欄外)の簡単な事例で補足します。

始めに、質量 $m$ が振動しないように、距離 $x_1$ ゆっくり押し場合を考えます。このとき、ばねの反力は図(欄外)のように、ばね定数 $k$ に比例して徐々に増加するため、 $x_1$ 動かしたときの力 $F_1$ は

$$F_1 = kx_1 \quad (1.68)$$

です。またこのとき、ばねに貯えられるひずみエネルギー $E_k$ は図(欄外)の変位と力のグラフの三角形部分の面積として

$$E_k = \frac{1}{2}x_1(kx_1) = \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (1.69)$$

と表わされます。

次にばねを瞬時に押し場合、時刻0で $F_1$ となり、その後 $F_1$ で押し続けるステップ入力を考えます。先のゆっくり押しした場合に比べ、常に $F_1$ で押ししているため、最終的な変位は $x_1$ より大きくなると予想されます。

始めに $F_1$ でゆっくり押しした場合の静的なつり合いの位置 $x_1$ でのエネルギー収支を考えます。時間 $t$ にかかわらず常に力 $F_1$ で $x_1$ 変位させたので仕事は $F_1x_1$ です。この仕事 $F_1x_1$ が、ばねのひずみエネルギー $E_k$ と質点の運動エネルギー $E_m$ に変化したため

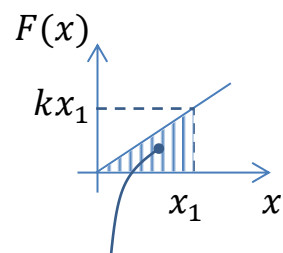
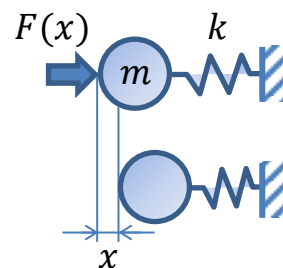
$$F_1x_1 = E_k + E_m \quad (1.70)$$

の関係が成り立ちます。

ここで、上式の運動エネルギー $E_m$ とひずみエネルギー $E_k$ の割合を考えます。 $x_1$ 変形したばねのひずみエネルギー $E_k$ は、先のゆっくり押しした場合と同様に

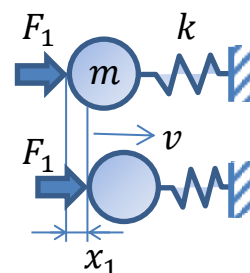
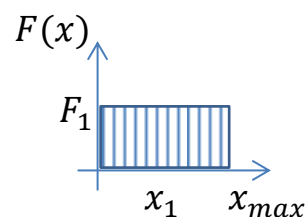
$$E_k = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(kx_1)x_1 = \frac{1}{2}F_1x_1 \quad (1.71)$$

です。従って、上式を式(1.70)に代入すれば、運動エネルギー $E_m$ は



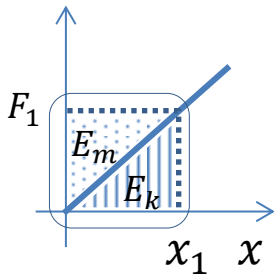
ひずみエネルギー

$$\frac{1}{2}x_1(kx_1)$$



$$E_m = F_1 x_1 - E_k = \frac{1}{2} F_1 x_1 \quad (1.72)$$

仕事  $F_1 x_1$  の内訳



と求まります。以上より、静的なつり合いの位置  $x_1$  までに力  $F_1$  がなした仕事  $F_1 x_1$  は、運動エネルギー  $E_k$  とひずみエネルギー  $E_k$  に半分ずつ配分されることがわかります。

この状況を図（欄外）に表せば、四角で囲った面積が仕事  $F_1 x_1$ 、右下の三角形がばねのひずみエネルギー  $E_k$ 、左上の三角形が質点の運動エネルギー  $E_m$  と表すことができます。

ここまでの議論で、ステップ入力では、ゆっくり押しした場合に比べ、「力  $F_1$  のつり合いの位置  $x_1$  で運動エネルギー  $E_m$  を持っている分だけ、その後、余分に変位する」ことが明らかです。では、どれだけ余分に変位するでしょうか？ 上記のエネルギーの考え方をを使って最終的な変位  $x$  を計算してみます。

力  $F_1$  のステップ入力において、最終的な最大変位が  $x$  に達すると考えます。ここで最大変位  $x$  の質点  $m$  の速度は、明らかに 0 です。従って、最大変位  $x$  におけるエネルギーのつり合いは  $x_1 = x$ 、 $E_m = 0$  を式(1.70)に代入し

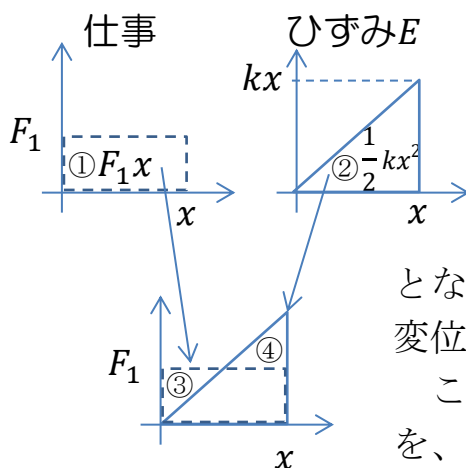
$$F_1 x = E_k + 0 \quad (1.73)$$

となります。従って、上式に  $E_k = kx^2/2$  を代入すれば、最終的な変位  $x$  は

$$\begin{aligned} F_1 x &= \frac{1}{2} kx^2 \\ 2F_1 &= kx \\ \therefore x &= 2 \cdot \frac{F_1}{k} \end{aligned} \quad (1.74)$$

となり、ゆっくり押しした場合の変位  $F_1/k$  に比べて 2 倍の変位となることがわかります。

ここで、上式の第 1 式のエネルギーのつり合いの意味を、図（欄外）の変位と力のグラフで考えると、①と②の面積が等しくなるように  $x$  が決まることがわかります。従って別の見方をすれば、2つのグラフを重ねた場合には、三角形③と④の面積が等しくなるように  $x$  が決まる、と言い換えることもできます。

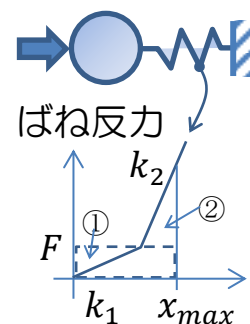


上記のように、変位と力のグラフに仕事とばねのひずみエネルギーを表して最大変位 $x$ 求める方法は、汎用性の高い計算方法です。代表的な非線形ばねへの適用例を挙げておきます。

### 例1) 非線形ばね1

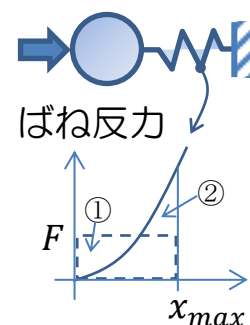
図(欄外)の1自由度のばねマスのはねが、荷重 $F$ ではね定数の傾きが $k_1$ から $k_2$ に変わる非線形ばねであるとします。荷重 $F$ のステップ入力を加えたときの最大変位 $x_{max}$ と最大ばね反力 $F_{max}$ は、図(欄外)の三角形①と②の面積が等しくなる幾何学的な関係から(計算過程は省略)、次式のように計算されます。

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{F}{k_1} \left(1 + \sqrt{k_1/k_2}\right) \\ F_{max} &= F \left(1 + \sqrt{k_2/k_1}\right) \end{aligned} \quad (1.75)$$



### 例2) 非線形ばね2

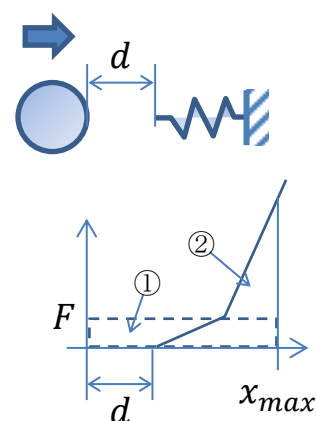
非線形ばねの特性が図(欄外)のように自由な曲線の場合も、図(欄外)の①と②の面積が同じになるような $x_{max}$ を、目分量または数値計算によって求めることができます。



### 例3) 空走距離 $d$ がある場合

図(欄外)のように質量とはねの間に、空走距離 $d$ がある場合も同様に解くことができます。図(欄外)の①と②の面積が同じになるような $x_{max}$ は幾何学的な関係から次式のように計算されます。

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{F}{k_1} \left(1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2} + \frac{2dk_1^2}{Fk_2}}\right) \\ F_{max} &= F \left(1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1} + \frac{2dk_2}{F}}\right) \end{aligned} \quad (1.76)$$



空走距離 $d$ の間になされた仕事は、すべて質点の運動エネルギーに変換されます。従って例1)に比べて、質点がばねに触れた時点で運動エネルギーを持っている分だけ、ばねが余分にたわむ、と解釈できます。

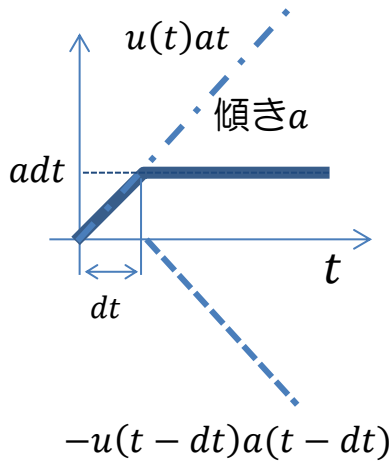


### 1.2.8. 道路の段差の解 2 (ランプ入力)

ステップ入力の応用として、道路の段差による変位が  $adt$  秒間の間に、傾き  $a$  で増えるように入力される場合を考えます。図 (欄外) の実線で表される道路の段差は、ある時間  $t_0$  から傾き  $a$  となるランプ関数  $u(t - t_0)a(t - t_0)$  を 2 つ使い、次のように表すことができます。

$$u(t)at - u(t - dt)a(t - dt) \quad (1.77)$$

運動方程式の解き方として、上式をそのままラプラス変換する方法もありますが、ここでは、1 つのランプ入力  $u(t)at$  に対する  $x$  を求め、得られた結果を時間  $dt$  ずらして重ね合わせて解きます。



それでは、始めに運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = u(t)at \quad (1.78)$$

の右辺のランプ入力  $u(t)at$  のラプラス変換を行い

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)at\} &= \int_0^{\infty} u(t)at \cdot e^{-st} dt \\ &= a \int_0^{\infty} 1 \cdot t \cdot e^{-st} dt \end{aligned} \quad (1.79)$$

とします。ここで、上式に式(1.58)の部分積分法の公式を適用すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)at\} &= a \left\{ \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \cdot t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-st}}{-s} \right) \cdot 1 dt \right\} \\ &= -\frac{a}{s} \left[ \frac{t}{e^{st}} \right]_0^{\infty} + \frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{a}{s} \left( \frac{\infty}{\infty} - \frac{0}{1} \right) + \frac{a}{s} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} \end{aligned} \quad (1.80)$$

となり、上式 3 行目に  $\infty/\infty$  が現れてしまいました。そこで上式 2 行目に戻り、第 1 項の定積分を観察します。式(1.54)のラプラス変換の定義より、 $s$  の値は  $t = \infty$  で  $t \ll e^{st}$  となる大きな値です。従って上式 3 行目は

$$\mathcal{L}\{u(t)at\} = -\frac{a}{s} \left( 0 - \frac{0}{1} \right) + \frac{a}{s} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} \quad (1.81)$$

となり、上式を解いて

$$\mathcal{L}\{u(t)at\} = 0 + \frac{a}{s} \left\{ 0 - \left( \frac{1}{s} \right) \right\} = \frac{a}{s^2} \quad (1.82)$$

となります。上式がランプ入力 $u(t)at$ のラプラス変換です。

従って、運動方程式(1.78)のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{x\}(ms^2 + k) = \frac{a}{s^2} \quad (1.83)$$

となり、上式の $\mathcal{L}\{x\}$ について部分分数展開を行えば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \frac{a}{s^2(ms^2 + k)} \\ &= \frac{a}{k} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{m}{ms^2 + k} \right) \\ &= \frac{a}{k} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + k/m} \cdot \frac{\sqrt{k/m}}{\sqrt{k/m}} \right) \end{aligned} \quad (1.84)$$

となります。上式を逆ラプラス変換し

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x\}\} = x = \frac{a}{k} \left( t - \frac{\sin \sqrt{k/m} t}{\sqrt{k/m}} \right) \quad (1.85)$$

となります。ここで $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と定義し上式に代入すれば

$$x = \frac{a}{k} \left( t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) \quad (1.86)$$

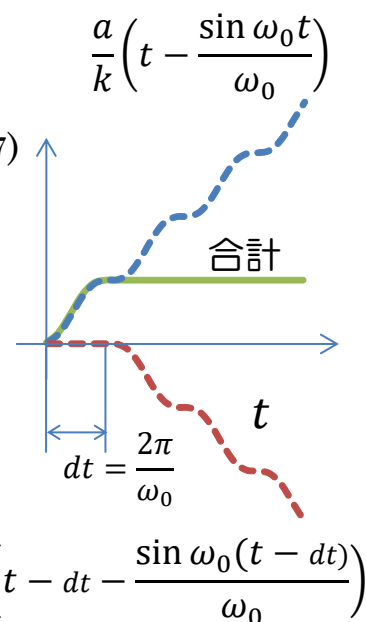
と表され、1つのランプ入力に対する $x$ が求まります。

以上より、式(1.77)の2つのランプ入力に対する $x$ は

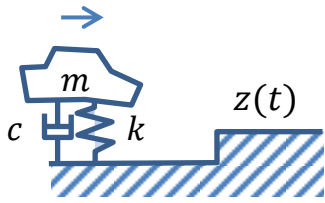
$t > dt$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{k} \left( t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right) - \frac{a}{k} \left\{ (t - dt) - \frac{\sin \omega_0 (t - dt)}{\omega_0} \right\} \\ &= \frac{a}{k} \left\{ -\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} + dt + \frac{\sin \omega_0 (t - dt)}{\omega_0} \right\} \end{aligned} \quad (1.87)$$

と求まります。上式より、ちょうど1周期、すなわち $dt = 2\pi/\omega_0$ とすれば図(欄外)のように、振動成分を打ち消すことができます。この特徴はいろいろな用途に利用されています。例えば電気自動車では、モーターの発生トルクをコントロールすることで、車の振動が発生しないスムーズで力強い加速を実現しています。



### 1.2.9.減衰比（ゼータ） $\zeta$ の意味



減衰比（ゼータ） $\zeta$ の意味を整理します。図（欄外）のモデルの運動方程式は、式(1.63)に減衰定数 $c$ を加えた

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(z - x) + c \left( \frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.88)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = c \frac{dz}{dt} + kz$$

です。上式をラプラス変換し

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = (cs + k)Z(s) \quad (1.89)$$

となります。従って、車の変位 $X(s)$ は上式を変形し

$$X(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} Z(s) \quad (1.90)$$

です。ここでは路面変位 $Z(s)$ として、時刻0で1となるステップ関数 $u(t)$ を考え、そのラプラス変換 $Z(s) = 1/s$ を上式に代入します。

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{ms}{ms^2 + cs + k} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (1.91)$$

ここで、 $c/(2m) \equiv A$ 、 $\sqrt{k/m} \equiv \omega$ と置き換え、逆ラプラス変換（ $e^{-at} \cos bt$ 、 $e^{-at} \sin bt$ ）できる形に部分分数展開します。

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2As + \omega^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + A - A}{s^2 + 2As + A^2 + \omega^2 - A^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + A}{(s + A)^2 + \omega^2 - A^2} + \frac{A}{(s + A)^2 + \omega^2 - A^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + A}{(s + A)^2 + \sqrt{\omega^2 - A^2}^2} + \frac{A}{\sqrt{\omega^2 - A^2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 - A^2}}{(s + A)^2 + \sqrt{\omega^2 - A^2}^2} \end{aligned} \quad (1.92)$$

複雑な式変形でしたが、上式は Appendix のラプラス変換表を使って、次式のように変換できます。

$$x(t) = 1 - e^{-At} \cos \sqrt{\omega^2 - A^2} t + \frac{A}{\sqrt{\omega^2 - A^2}} \cdot e^{-At} \sin \sqrt{\omega^2 - A^2} t \quad (1.93)$$

上式の観察から $\omega^2 - A^2 = 0$ の条件で、非周期的な関数となり振動しないと推察されます。確認してみましょう。

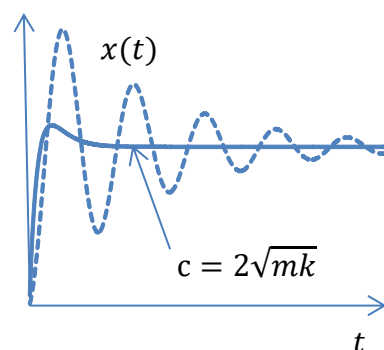
$\sqrt{\omega^2 - A^2} t \equiv D$ と置き換え、「 $\sin D / D$ の $D \rightarrow 0$ の極限が1（導出は高校数学の参考書等を参照）」を利用すれば

$$\begin{aligned} \lim_{D \rightarrow 0} x(t) &= \lim_{D \rightarrow 0} \left( 1 - e^{-At} \cos D + Ate^{-At} \cdot \frac{\sin D}{D} \right) \\ &= 1 - e^{-At} + Ate^{-At} \\ &= 1 - e^{-At}(1 + At) \end{aligned} \quad (1.94)$$

となります。上式は $t = 0$ のとき0、 $t = \infty$ のとき1となる非周期的な関数です。このように振動しない特別な減衰 $c$ は $\omega^2 - A^2 = 0$ の関係から次のように求められ

$$\begin{aligned} \omega^2 - A^2 &= 0 \\ \frac{k}{m} - \left( \frac{c}{2m} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$c = 2m\sqrt{k/m} = 2\sqrt{mk} \equiv c_c$$



臨界減衰係数 $2\sqrt{mk} \equiv c_c$ と定義されます。この臨界減衰係数 $c_c$ に対する、減衰 $c$ の割合は減衰比（ゼータ） $\zeta = c/c_c$ と呼ばれ「 $\zeta > 1$ で1自由度系の自由振動が非周期関数になる（振動しない）」ことを意味します。係数 $A$ は

$$A = \frac{c}{2m} = \frac{c}{2\sqrt{m}\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = \frac{c}{c_c} \omega = \zeta \omega \quad (1.96)$$

と表され、一般的な教科書では、式(1.93)は上式を用いて

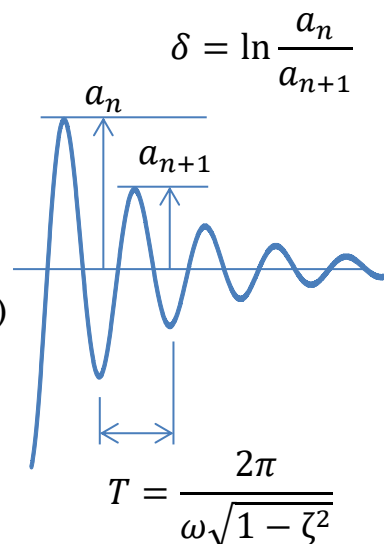
$$x(t) = 1 - e^{-\zeta \omega t} \cos \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot e^{-\zeta \omega t} \sin \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad (1.97)$$

と表現されます。一見複雑ですが、 $\zeta = 1$ で周期関数が消え式(1.94)に、 $\zeta = 0$ で式(1.67)となるシンプルな式です。

自由振動の1周期ごとの振動成分の減少率（の自然対数）を対数減衰率 $\delta$ と呼びます。上式からベース成分1を引き、周期 $T = 2\pi/(\omega\sqrt{1 - \zeta^2})$ を $t$ に代入すれば

$$\delta = \ln \frac{x(2T) - 1}{x(T) - 1} = \ln \frac{-e^{-\zeta \omega 2T}}{-e^{-\zeta \omega T}} = \zeta \omega T = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.98)$$

と求まります。



### 1.3. エンジンの振動現象

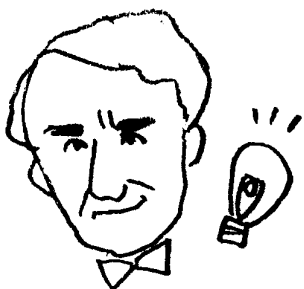
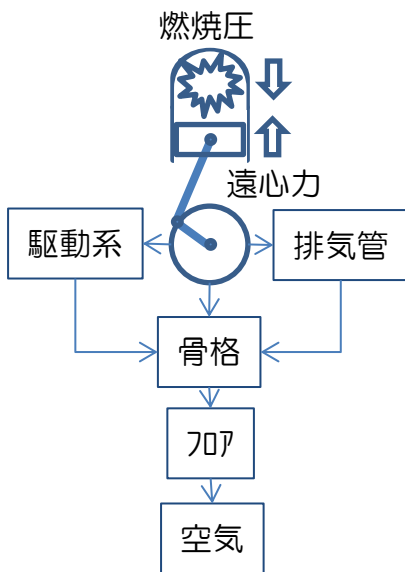
自動車の代表的な振動現象のひとつである、エンジンの振動現象について考えます。前節の道路の段差乗り越え時の車の振動と異なり、車に加わる力が周期的であることが特徴です。周期的な力の原因は、エンジン気筒の燃焼による圧力と、ピストンの上下の往復運動です。

4ストロークサイクルエンジンの場合、4気筒エンジンならば1回転当たり2回の燃焼、6気筒エンジンならば3回の燃焼がエンジンのトルク変動を引き起こします。

また、エンジンはピストンの質量を上下に振り回しながらその力をタイヤに伝えるため、ピストンが上下に動いたときの反動がエンジンのクランクシャフトに伝わり、上下の振動やトルク変動を生じます。これは、遠心力のようなもので、回転数が高いほど大きな力となります。一般的にエンジンの回転数が小さい領域では、燃焼圧による力が支配的ですが、回転数の上昇に伴いピストンの遠心力（慣性力）の影響が支配的になります。

エンジン音は加速感を演出する要素でもあるため、回転数の上昇に伴って、適度に大きくなることはよしとされます。しかし、車の部品同士の共振が重なると、エンジンの力が増幅されて室内に伝わり振動騒音の問題になります。車の開発では、エンジンの力に対して振動しづらい車を作るために、各部品の共振を離したり、構造部材の剛性を上げて、エンジンの振動の大きい回転数の範囲外に、部品の共振を配置することがよく行われます。

これらを行うには、エンジンの強制力や車の振動特性を把握することが重要となります。そこで役立つのが、車の振動特性を周波数 $\omega$ ごとの力の増幅比で表した伝達関数の考え方です。



トーマス・エジソン

完璧だと思っても、もうひと押しすればおまけが手に入る。

### 1.3.1.伝達関数の考え方

質量 $m$ の車にエンジンの周期的な力 $F \sin \omega t$ を加えたときの車の振動を考えます。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F \sin \omega t \quad (1.99)$$

未定係数法より、 $x = X \sin \omega t$ を上式に代入し、振幅レベル $X$ を求めます。

$$\begin{aligned} -m\omega^2 X \sin \omega t + kX \sin \omega t &= F \sin \omega t \\ (-m\omega^2 + k)X &= F \\ X &= \frac{1}{-m\omega^2 + k} F \end{aligned} \quad (1.100)$$

上式より、エンジンの回転数上昇に伴ってトルク変動の周波数 $\omega$ が高くなると、振幅レベル $X$ は $\omega = \sqrt{k/m}$ で無限大となり、それ以降は小さくなっていきます。

一般に、単位入力に対する出力の比を伝達関数(transfer function)と呼び、上式を変形した

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{-m\omega^2 + k} \equiv H(\omega) \quad (1.101)$$

を力に対する変位の伝達関数 $H(\omega)$ と呼びます。例えば1つの車にいろいろなエンジンを搭載する場合、エンジンごとの強制力 $F_i(\omega)$ を測定しておけば、振動振幅 $X_i(\omega)$ は

$$X_i(\omega) = H(\omega)F_i(\omega) \quad (1.102)$$

と表せます。

では、次に加速度の伝達関数 $G(\omega)$ を求めます。加速度は変位の2回微分であるため

$$\begin{aligned} x &= X \sin \omega t \\ \dot{x} &= \omega X \cos \omega t \\ \ddot{x} &= -\omega^2 X \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.103)$$

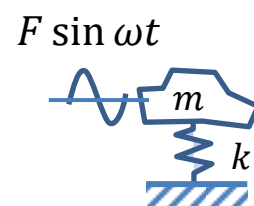
の関係があります。上式より、加速度 $\ddot{x}$ の振幅は変位 $x$ の振幅 $X$ に $-\omega^2$ を乗じた関係であることから

$$G(\omega) = -\omega^2 H(\omega) \quad (1.104)$$

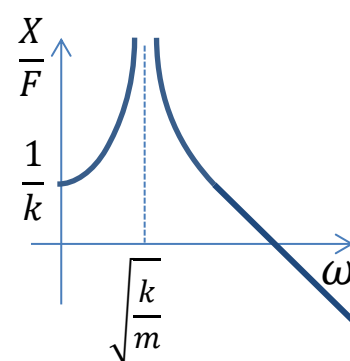
と表されます。従って、上式に式(1.101)を代入すれば加速度の伝達関数 $G(\omega)$ は

$$G(\omega) = \frac{-\omega^2}{-m\omega^2 + k} \quad (1.105)$$

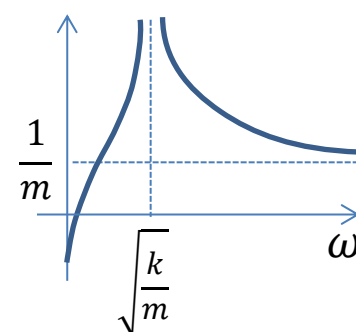
となります。



変位の伝達関数 $H(\omega)$   
(コンプライアンス)



加速度の伝達関数 $G(\omega)$   
(イナータンス)



### 1.3.2.伝達関数の測定方法

伝達関数 $H(\omega)$ は、加振器を使って力の周波数 $\omega$ を段階的に変え、力の振幅 $F(\omega)$ と構造物の変位の振幅 $X(\omega)$ を計測し、式(1.102)を変形した

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (1.106)$$

から求めることができます。

また別の方法としては打撃試験があります。衝撃的な力は幅広い周波数成分を含んでいるため、衝撃的な力を受けた構造物は、低い周波数から高い周波数まで、まんべんなく揺らされます。従って、ハンマーで構造物を打撃し、ハンマーの力 $f(t)$ と構造物の振動 $x(t)$ を測定し、それぞれをフーリエ変換し $F(\omega)$ 、 $X(\omega)$ とすれば、伝達関数 $H(\omega)$ を求めることができます。

この項では、図(欄外)に示すような非常に短い時間 $a$ ずれて重なる2つのステップ入力で表されるインパルス入力が、幅広い周波数の周期的な力を含んでいることをラプラス変換で確認します。時間 $a$ で立ち上がる単位ステップ関数 $u(t-a)$ のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^{\infty} u(t-a)e^{-st} dt \quad (1.107)$$

です。置換積分を行うために $z = t - a$ と、その微分

$$\frac{dz}{dt} = 1 \quad (1.108)$$

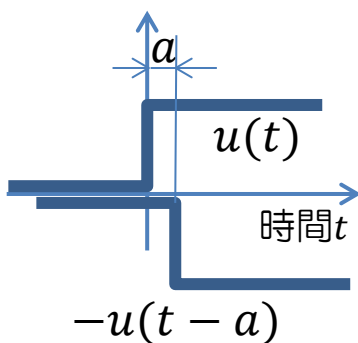
を式(1.107)に代入すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)\} &= \int_{0-a}^{\infty-a} u(t-a)e^{-st} \frac{dt}{dz} dz \\ &= \int_{-a}^{\infty-a} u(z)e^{-s(z+a)} dz \quad (1.109) \\ &= e^{-sa} \int_{-a}^{\infty-a} u(z)e^{-sz} dz \end{aligned}$$

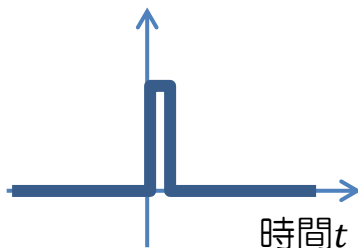
となります。ここで、上式の $u(z)$ は単位ステップ関数であるため、積分区間 $-a \sim 0$ の積分値は0です。従って、上式に $u(z) = 1$ を代入し、積分区間 $-a \sim \infty - a$ を $0 \sim \infty - a$ に置き換えれば、単位ステップ関数 $u(t-a)$ のラプラス変換は次のように求まります。



ステップ関数の重ね合わせ



$a$ を限りなく小さくする



瞬間的な矩形波を表せる

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{u(t-a)\} &= e^{-sa} \int_0^{\infty-a} 1 \cdot e^{-sz} dz \\
 &= e^{-sa} \left[ \frac{e^{-sz}}{-s} \right]_0^{\infty-a} \\
 &= e^{-sa} \left( \frac{0}{-s} - \frac{1}{-s} \right) \\
 &= \frac{e^{-sa}}{s}
 \end{aligned} \tag{1.110}$$

準備が整いました。ここでは単位インパルス関数 $\delta(t)$ （面積が1、すなわち無限小の時間幅と無限大の高さのインパルス関数。ディラックのデルタ関数とも呼ばれる）を2つのステップ関数の極限で表します。

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \{u(t) - u(t-a)\} \tag{1.111}$$

上式のラプラス変換（アペンドィックスを参照）を行い

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\delta(t)\} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \{u(t) - u(t-a)\} e^{-st} dt \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-as}}{as}
 \end{aligned} \tag{1.112}$$

となります。ここで、次に示すロピタルの定理(L'Hôpital's rule)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ or } \frac{0}{0} \text{ ならば,} \tag{1.113}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

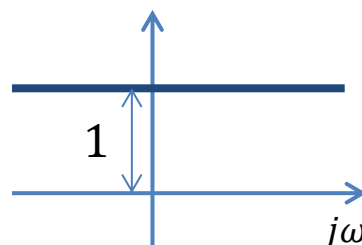
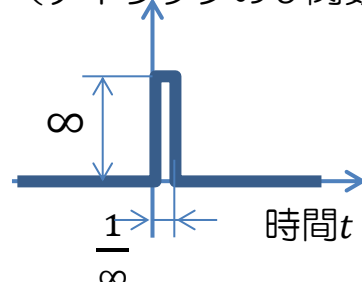
を使って、式(1.112)は

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-as}}{as} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{se^{-as}}{s} = \frac{s}{s} = 1 \tag{1.114}$$

となります。上式は、単位インパルス関数 $\delta(t)$ が全ての周波数で振幅1の周期的な力を含んでいることを示しています。

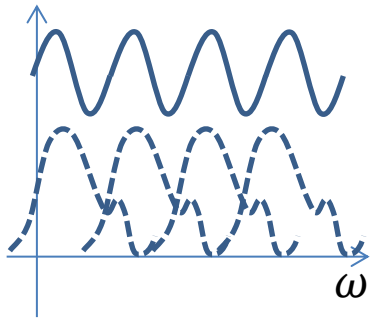
従来の加振器を使った試験に比べ、ハンマーの一撃で伝達関数を測定できる打撃試験は非常に便利な方法です。インパルス関数に近い打撃を行うために、ハンマーの先端の硬さを調節したり、接触時間をできる限り短くするために「脱力して打撃を行い、打撃の瞬間にハンマーを引く」といった動作が必要になります。

単位インパルス入力  
(ディラックの $\delta$ 関数)

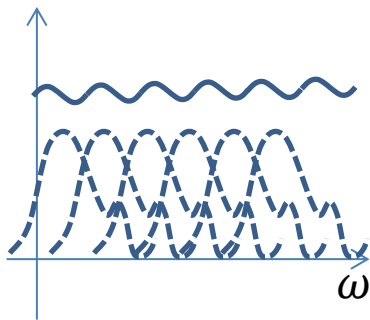




## 4 気筒のトルク変動



## 6 気筒のトルク変動



## 1.3.3.エンジンの強制力 燃焼圧によるトルク変動

エンジンの燃焼圧によるトルク変動は、一般に6気筒エンジンよりも、4気筒エンジンの方が大きくなります。例えば6気筒と4気筒で同じ平均トルクを出す場合、図(欄外)のように気筒数が少ないほど、トルク変動の谷が深くなります。

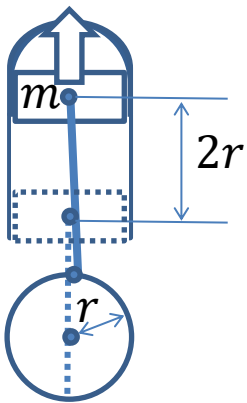
感覚的には、大きな鉄の円盤を回転させるために大きな力を1回加えるよりも、10分の1の力を10回加える方が滑らかに回転するというイメージです。また、円盤は重ければ重いほど、ゆっくり滑らかに回ります。この重い円盤の役割は、エンジンのフライホイールという部品が担っており、トルク変動の抑制やトルクを安定してタイヤに伝えることに寄与しています。

## 1.3.4.エンジンの強制力 ピストンの慣性力

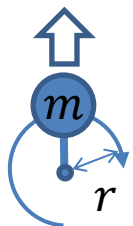
エンジンは燃焼による圧力でピストンを押し下げクランクシャフトを回します。このとき、ピストンの質量によって慣性力が生じ、振動騒音の問題になる場合があります。この慣性力は遠心力と同じような力で、図(欄外)のように質量 $m$ のピストンが上下に $2r$ の往復運動する場合の慣性力は、長さ $r$ の棒の先に質量 $m$ のおもりをつけて回転させたときの遠心力の上下成分と同じです。

図(次ページ下)に4気筒エンジンの4つのピストン質量を合わせた重心(以下、ピストン重心)の上下の振動振幅を示します。ピストン重心は、ピストンが上死点と下死点に2つずついるとき(図の0度)最も上に位置します。一方、90度回転したときの重心位置は、リンク機構の位置関係から最も下に移動します。従って、4気筒では1回転につき2回、ピストン重心の上下の往復運動による慣性力が発生します。この上下方向の慣性力はクランクシャフトを上下に引っ張ると共に、燃焼圧による力同様、クランクシャフトとのオフセット距離 $r$ に応じたトルク変動を生じます。

慣性力



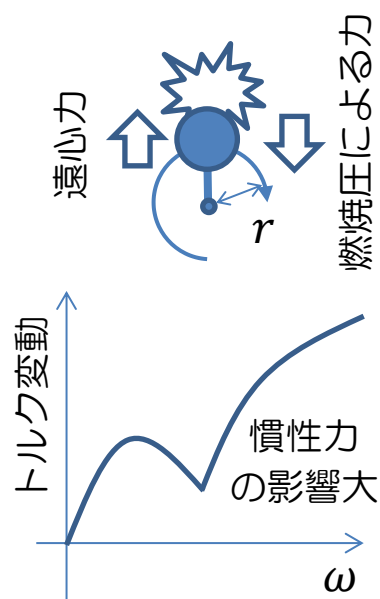
慣性力=遠心力



前項で述べたようにトルク変動は燃焼圧によっても起こるため、両方の重ね合わせを考えます。

今、人がピストンを振り回し、その遠心力を支えている状態を考えます。図(欄外)のように、ピストンが一番上にあるとき、遠心力の影響により持ち手は上に引っ張られます。一方、エンジンの燃焼圧による力はピストンが上にあるときに大きくなるため、遠心力と逆向きです。

一般にエンジンのトルク変動は回転数が小さい領域では燃焼圧が支配的ですが、回転数の上昇に伴ってピストンの慣性力の影響が大きくなります。2つの力の向きは逆向きのため、図(欄外)のようにエンジンのトルク変動がちょうど打ち消し合ってエンジン音が小さくなる回転数が存在します。

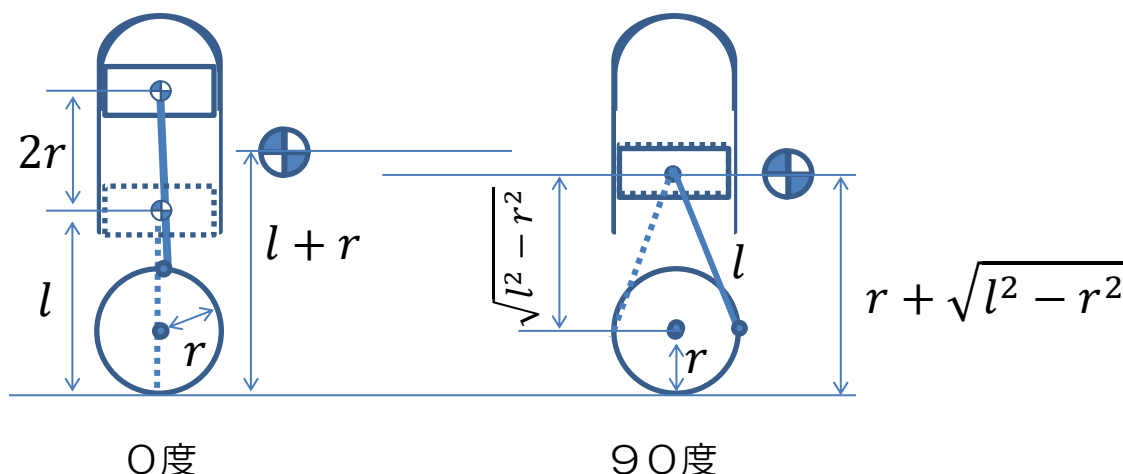


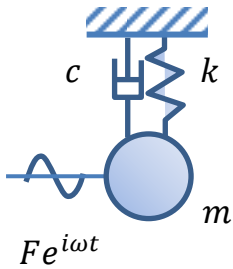
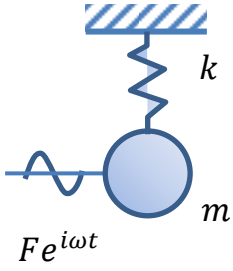
車の振動振幅 $X(\omega)$ は、エンジンの強制力 $F(\omega)$ と車の伝達関数 $H(\omega)$ を用いて

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (1.115)$$

と表されるため、車の骨格の共振の影響で $H(\omega) = \infty$ であっても、 $F(\omega) = 0$ なら車の振動振幅 $X(\omega)$ は0です。燃焼圧によるトルク変動は、燃料と空気が多いほど大きくなるため、アクセルを大きく踏んだ場合、打ち消し合う回転数は高い回転数へ移ります。従って、例えば、一般のドライバーがよく使うアクセル操作におけるエンジンの強制力 $F(\omega)$ の谷に、支持部材の共振周波数を配置することも、振動しづらい車をつくるためのひとつの考え方です。

4気筒エンジンのピストン重心は  
1回転(360度)につき2回上下する





### 1.3.5.減衰を含む運動方程式の伝達関数の特徴 1

前述の式(1.100)で、図（欄外）のモデルの伝達関数は共振周波数 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ で無限大になることを確認しました。減衰 $c$ がある場合はどうでしょうか。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = Fe^{i\omega t} \quad (1.116)$$

です。上式に $x = Xe^{i\omega t}$ を代入し伝達関数 $X/F$ を求めます。

$$-m\omega^2 X e^{i\omega t} + i\omega c X e^{i\omega t} + k X e^{i\omega t} = F e^{i\omega t}$$

$$(-m\omega^2 + i\omega c + k)X = F \quad (1.117)$$

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{-m\omega^2 + k + i\omega c}$$

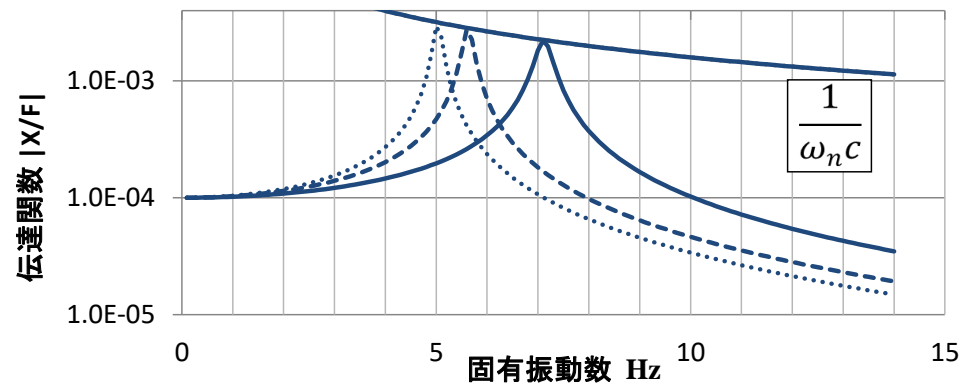
上式に $\omega = \sqrt{k/m}$ を代入すれば

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{0 + i\omega_n c} = \frac{1}{i\omega_n c} \quad (1.118)$$

$$\therefore \left| \frac{X}{F} \right| = \frac{1}{\omega_n c}$$

上式より、実部は0、虚部は $c\omega$ となり、共振周波数の振動レベルは減衰 $c$ だけで決まることがわかります。

ここで、式(1.117)において、 $c = 10 \text{Ns/m}$ 、固有振動数 $\omega_n/2\pi = 5, 6, 7 \text{Hz}$ の伝達関数をグラフに示します。3つの伝達関数ピークはすべて、同一の式(1.118)に接することが確認できます。

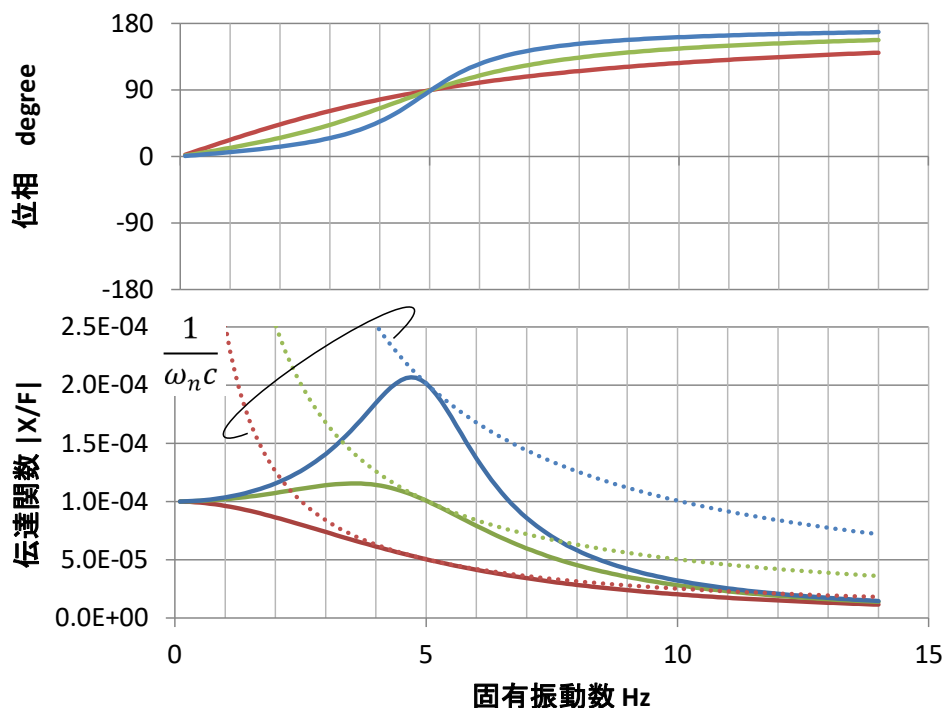


一方、共振周波数 $\omega_n$ の速度 $\dot{X}$ は式(1.103)より、式(1.118)に $\omega_n$ を乗じて

$$\left| \frac{\dot{X}}{F} \right| = \omega_n \left| \frac{X}{F} \right| = \frac{\omega_n}{\omega_n c} = \frac{1}{c} \quad (1.119)$$

です。質量 $m$ 、剛性 $k$ によらず、一定値 $1/c$ になります。

次に減衰 $c$ を変えた場合の式(1.117)の特徴を確認します。 $\omega_n/2\pi=5\text{Hz}$ において、 $c=158$ 、 $316$ 、 $632\text{Ns/m}$ の3ケースをグラフに示します（実線：式(1.117)、破線：式(1.118)）。



グラフより、減衰 $c$ が大きいほど伝達関数ピークは低周波側に移りますが、位相 90 度となる振動数は変わりません。従って、実験データから固有振動数を見積もる場合、伝達関数ピークではなく、位相 90 度の振動数を読みます。

次に共振周波数での伝達力 $Re^{i\omega t}$ を確認します。図（欄外）より、ばね反力 $kx$ と減衰力 $c\dot{x}$ の合計を考える必要があります。 $x = Xe^{i\omega t}$ より、次のように変形し

$$\begin{aligned} x &= Xe^{i\omega t} \\ \dot{x} &= i\omega Xe^{i\omega t} \\ \therefore i\omega X &\equiv \dot{X} \end{aligned} \quad (1.120)$$

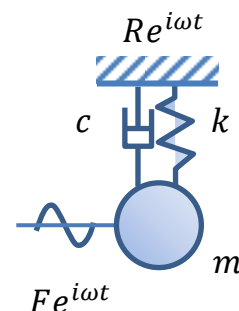
の関係を得ます。従って伝達率 $Re^{i\omega t}/Fe^{i\omega t}$ は

$$\frac{Re^{i\omega t}}{Fe^{i\omega t}} = \frac{R}{F} = \frac{Xk + \dot{X}c}{F} = \frac{X}{F}(k + i\omega c) \quad (1.121)$$

と表されます。上式に式(1.117)を代入し

$$\frac{R}{F} = \frac{X}{F}(k + i\omega c) = \frac{k + i\omega c}{-m\omega^2 + k + i\omega c} \quad (1.122)$$

となります。上式に $\omega = \sqrt{k/m}$ を代入すれば



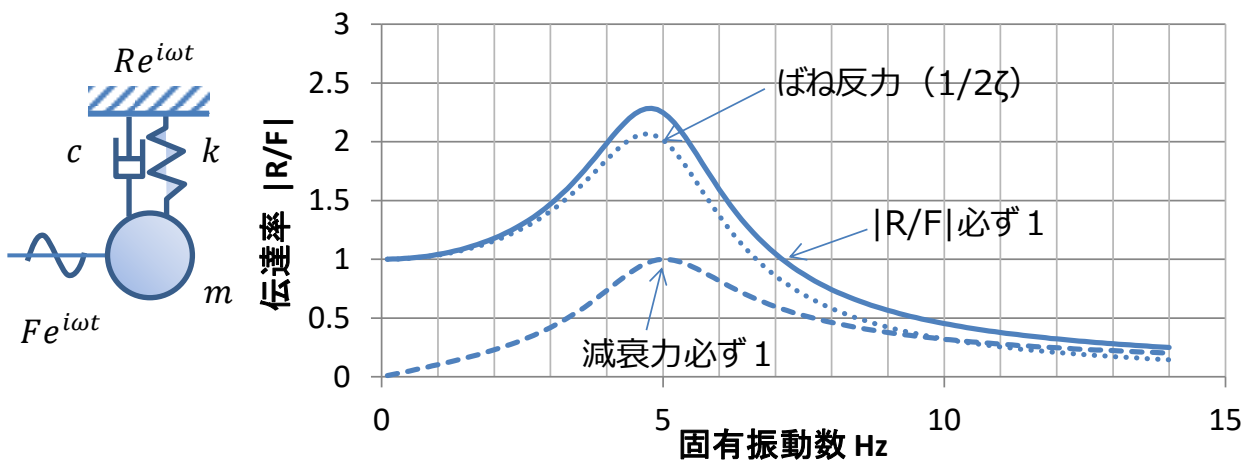
$$\frac{R}{F} = \frac{k + ic\sqrt{k/m}}{0 + ic\sqrt{k/m}} = \frac{\sqrt{mk}}{ic} + 1 \quad (1.123)$$

です。見通しをよくするために、減衰比（ゼータ） $\zeta$ を使って上式を整理します。減衰比 $\zeta$ は1自由度系が振動しない臨界減衰係数 $c_c = 2\sqrt{mk}$ に対する減衰 $c$ の割合で、 $\zeta = c/c_c$ と定義されています。上式に、 $c = \zeta c_c = \zeta 2\sqrt{mk}$ を代入すれば

$$\frac{R}{F} = \frac{\sqrt{mk}}{ci} + 1 = \frac{\sqrt{mk}}{\zeta 2\sqrt{mk}i} + 1 = -\frac{1}{2\zeta}i + 1 \quad (1.124)$$

$$\therefore \left| \frac{R}{F} \right|_{\omega=\sqrt{k/m}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2 + 1}$$

となります。はじめに、式(1.122)において $\omega_n/2\pi=5\text{Hz}$ 、 $c=158\text{Ns/m}$  ( $\zeta=0.25$ )となる伝達率 $|R/F|$ をグラフに示します（実線：伝達率 $|R/F|$ 、点線：ばね反力による伝達率、破線：減衰力による伝達率）。



0Hzでは、ばね反力（点線）が支配的です。一方、固有振動数5Hzでは、式(1.124)の通り減衰力による伝達率（破線）は1となります。

詳細は割愛しますが、固有振動数 $f$ の $\sqrt{2}$ 倍（グラフでは7.07Hz）の振動数で伝達率が1となることが知られています。従って、例えば7.07Hzで防振効果を得たい場合、固有振動数を5Hz以下にする必要があります。

### 1.3.6.減衰を含む運動方程式の伝達関数の特徴 2

図（欄外）のように、接地面を強制変位させる場合の変位伝達率 $X/Z$ を計算します。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(z - x) + c \left( \frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.125)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = c \frac{dz}{dt} + kz$$

となります。路面変位 $z = Ze^{i\omega t}$ とすれば

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = ic\omega Ze^{i\omega t} + kZe^{i\omega t} \quad (1.126)$$

上式に $x = Xe^{i\omega t}$ を代入し、変位伝達率 $X/Z$ を求めます。

$$-m\omega^2 Xe^{i\omega t} + ic\omega Xe^{i\omega t} + kXe^{i\omega t} = Ze^{i\omega t}(k + i\omega c)$$

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)X = Z(k + i\omega c)$$

$$X = \frac{k + i\omega c}{-m\omega^2 + k + ic\omega} Z \quad (1.127)$$

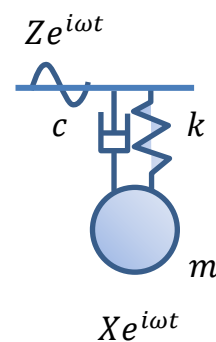
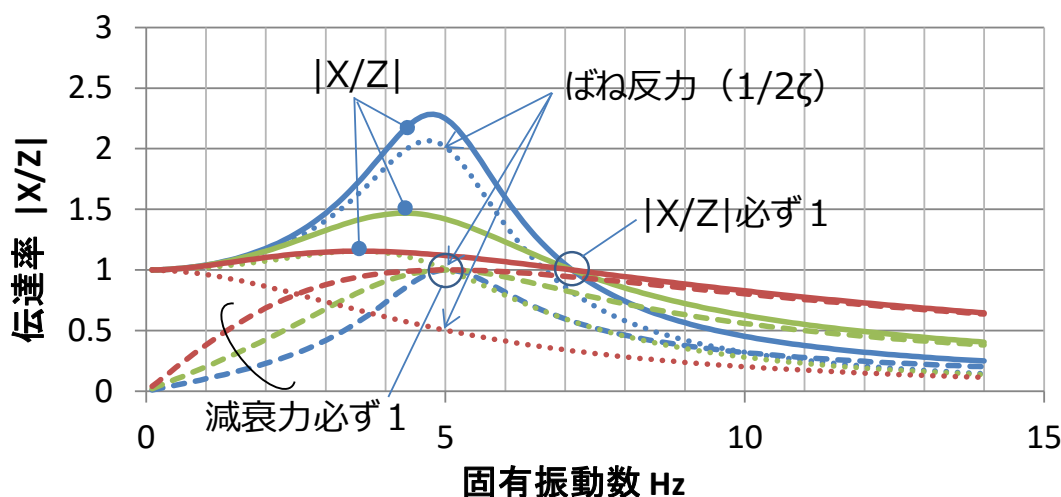
$$\frac{X}{Z} = \frac{k + i\omega c}{-m\omega^2 + k + ic\omega}$$

上式は先に求めた式(1.122)と同じです。従って、共振周波数 $\omega = \sqrt{k/m}$ での変位伝達率は式(1.124)と同様に

$$\frac{X}{Z} = \frac{R}{F} = -\frac{1}{2\zeta}i + 1$$

$$\therefore \left| \frac{X}{Z} \right|_{\omega=\sqrt{k/m}} = \sqrt{\left( \frac{1}{2\zeta} \right)^2 + 1} \quad (1.128)$$

となります。 $\zeta = 0.25, 0.5, 1.0$  ( $c = 158, 316, 632 \text{Ns/m}$ )の変位伝達率 $|X/Z|$ をグラフに示します（実線：変位伝達率 $|X/Z|$ 、点線：ばね反力による変位伝達率、破線：減衰力による変位伝達率）。



## 1.4. 運動方程式の立て方、解き方

一般に、運動方程式は質量マトリクス $M$ 、減衰マトリクス $C$ 、剛性マトリクス $K$ を用いて

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (1.129)$$

と表されます。未定係数法より $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$ と置いて上式を整理すれば、振動振幅 $\{X\}$ は次のように求められます。

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M + i\omega C + K)\{X\}e^{i\omega t} &= \{F\}e^{i\omega t} \\ \{(-\omega^2 M + K) + i(\omega C)\}\{X\} &= \{F\} \\ \{X\} &= \{(-\omega^2 M + K) + i(\omega C)\}^{-1}\{F\} \end{aligned} \quad (1.130)$$

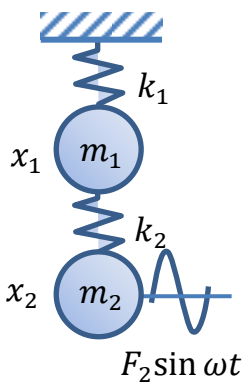
上記手順の中で、手間がかかるのは

1. 運動方程式を立てること
2. 逆行列を計算すること

です。この節では、運動方程式を簡単に立てる方法と、複素数を含む行列の逆行列の計算方法を簡単に整理しておきます。

### 1.4.1. 運動方程式の立て方

運動方程式をミスなく、機械的に組み上げる方法があります。この方法は、1度意味を知った後は、そういうものだと思って使えば非常に便利です。図(欄外)のような2質点のばねマス運動方程式で説明しますが、多自由度でも同じです。



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= F_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.131)$$

上式において、質点間に連結されたばね $k_2$ は、相対距離に比例した反力を発生することを表しています。また、接地されたばね $k_1$ は、質点 $m_1$ の変位に比例した反力を発生します。上式を行列で書き直し、ばね要素 $k_1$ 、 $k_2$ を分けて表すと

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (1.132)$$

となります。上式より質点間に連結されたばね要素は

$$\text{ばね要素} \begin{bmatrix} k & \cdots & -k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -k & \cdots & k \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

と表され、相対距離に比例した反力が2つの質点に働くことを表現していることがわかります。一方、接地されたばね要素は

$$\text{接地されたばね要素} \quad \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & k & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.134)$$

と表されます。減衰要素も同様の考え方で組み上げることができます。

### 1.4.2. 強制変位入力の与え方

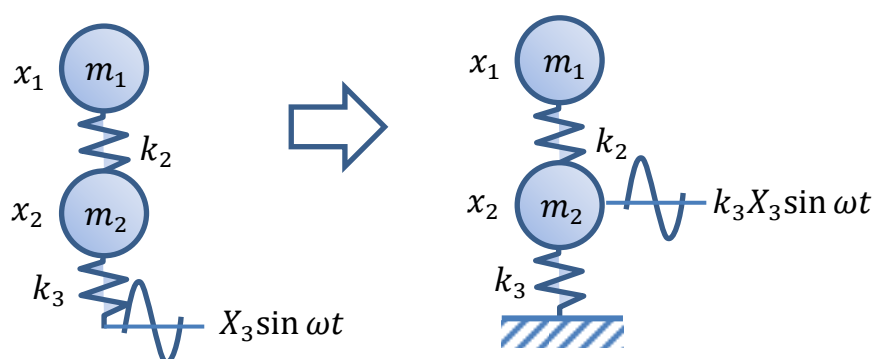
強制変位入力の与え方を考えます。例えば、下図のように周期的に波打つ路面の変位  $x_3 = X_3 \sin \omega t$  が、ばね  $k_3$  を介して2質点のばねマスモデルに入力される場合、その運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= k_3(X_3 \sin \omega t - x_2) \end{aligned} \quad (1.135)$$

と表されます。上式を行列で書き直して整理すると

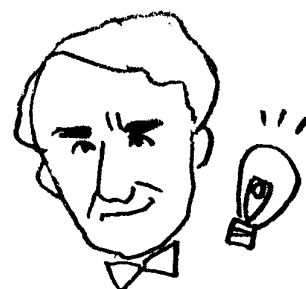
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_3 X_3 \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (1.136)$$

となります。結果として強制変位入力、入力点をばね要素  $k_3$  で接地し、ばね定数  $k_3$  に比例した力  $k_3 X_3 \sin \omega t$  を質点  $m_2$  に与えればよいことになります。



トーマス・エジソン

あらゆるものには輝くダイヤが隠されている。磨けば光る。





### 1.4.3.減衰を含む運動方程式の解き方

一般に、運動方程式は質量マトリクス $M$ 、減衰マトリクス $C$ 、剛性マトリクス $K$ を用いて

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (1.137)$$

と表されます。未定係数法より $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$ と置いて上式を整理すれば、振動振幅 $\{X\}$ は次のように求められます。

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M + i\omega C + K)\{X\}e^{i\omega t} &= \{F\}e^{i\omega t} \\ \{(-\omega^2 M + K) + i(\omega C)\}\{X\} &= \{F\} \\ \{X\} &= \{(-\omega^2 M + K) + i(\omega C)\}^{-1}\{F\} \end{aligned} \quad (1.138)$$

上式を計算するには複素数 $i$ が含まれる行列の逆行列を求める必要があります。ここで、上式の実部と虚部を

$$\begin{aligned} -\omega^2 M + K &\equiv A \\ \omega C &\equiv B \end{aligned} \quad (1.139)$$

と置きかえ、 $A + Bi$ の逆行列を $\alpha + \beta i$ とすると

$$(A + Bi)(\alpha + \beta i) = 1 \quad (1.140)$$

の関係があります。上式を実数と虚部に分けると

$$A\alpha - B\beta + (A\beta + B\alpha)i = 1 \quad (1.141)$$

となります。ここで、上式を恒等式として考えれば

$$A\alpha - B\beta = 1 \quad (1.142)$$

$$A\beta + B\alpha = 0 \quad (1.143)$$

の関係から $\alpha$ と $\beta$ を求めることができます。式(1.143)より

$$\beta = A^{-1}(-B\alpha) \quad (1.144)$$

上式を式(1.142)に代入することで

$$\begin{aligned} A\alpha + BA^{-1}B\alpha &= 1 \\ (A + BA^{-1}B)\alpha &= 1 \\ \alpha &= (A + BA^{-1}B)^{-1} \end{aligned} \quad (1.145)$$

$\alpha$ を $A$ と $B$ で表現することができました。上式を式(1.144)に代入すれば

$$\begin{aligned} \beta &= A^{-1}(-B\alpha) \\ &= -A^{-1}B(A + BA^{-1}B)^{-1} \end{aligned} \quad (1.146)$$

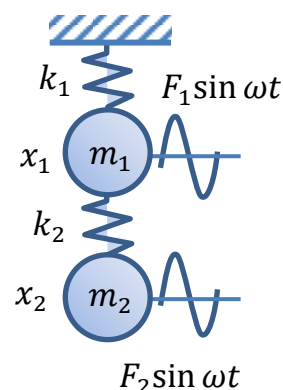
となり、 $A + Bi$ の逆行列 $\alpha + \beta i$ が求められます。以上より、式(1.138)の3行目の逆行列は次のように置き換えられ、振動振幅 $\{X\}$ を求めることができます。

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{A + Bi\}^{-1}\{F\} \\ &= (\alpha + \beta i)\{F\} \\ &= \{(A + BA^{-1}B)^{-1} + i(-A^{-1}B(A + BA^{-1}B)^{-1})\}\{F\} \end{aligned} \quad (1.147)$$

### 1.4.4.Excel を使った数値計算

上式(1.147)を利用して、式(1.132)の2質点モデルの計算を Excel で解いてみます。まず、モデル全体の諸元を入力します。

	A	B	C	D
1	$m_1$	10	kg	質点1の質量
2	$m_2$	10	kg	質点2の質量
3	$k_1$	10000	N/m	ばね1のばね定数
4	$k_2$	10000	N/m	ばね2のばね定数
5	$c_1$	10	Ns/m	減衰1の減衰定数
6	$c_2$	10	Ns/m	減衰2の減衰定数
7	$F_1$	0	N	質点1の入力の振幅
8	$F_2$	1	N	質点2の入力の振幅



次に、 $M$ 、 $K$ 、 $C$ 、 $F$ のマトリクスを作成します。次のように、 $M$ 、 $F$ マトリクスのセルを組みます。

	A	B	D
	$M$ マトリクス		$F$ マトリクス
11	=B1	0	=B7
12	0	=B2	=B8

ここで、複数のセルを1つの行列として認識させるために、名前の定義を利用します。A11セルからB12セルの範囲を選択し、左上の名前窓に「M」と入力しEnterを押します。同様にD11セルとD12セルを選択し、左上の名前窓に「F」と入力しEnterを押します。

同様に、 $K$ 、 $C$ マトリクスのセルを組みます。

	A	B	C	D	E	F
	$K$ マトリクス		$k_1$ マトリクス	$k_2$ マトリクス		
15			=B3	0	=B4	=-B4
16			0	0	=-B4	=B4

A15セルからB16セルの範囲を選択し、左上の名前窓に「K」と入力しEnterを押し、さらに隣の数式窓に「=C15:D16+E15:F16」と入力し、Ctrl+Shift+Enterを押し、 $K$ マトリクスの行列を設定します。

	A	B	C	D	E	F
	Cマトリクス		c <sub>1</sub> マトリクス		c <sub>2</sub> マトリクス	
19			= B5	0	= B6	= -B6
20			0	0	= -B6	= B6

上記のKマトリクス同様に、Cマトリクスの設定を行います。名前「C」は使えないため、「Cm」とします。

準備が整いました。式(1.147)を利用して、質点1、質点2の振幅レベルと位相を計算します。周波数ごとの計算を行うために、次のようにセルを組みます。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	周波数	real		img		レベル		位相		
29										
30	<i>f</i>	$\omega$	$X_1$	$X_2$	$X_1$	$X_2$	$X_1$	$X_2$	$X_1$	$X_2$
31	0.1									
32										
33										

周波数  $f$ 、 $\omega$  の設定

この入力例では、周波数 $f$ の刻みは $df = 0.1\text{Hz}$ とし

A31 セル=0.1

A32 セル=\$A\$31+A31

と入力し、A列下方向にコピーします。また周波数 $\omega$ は

B31 セル= $2*\pi()*A31$

と入力し、B列下方向にコピーします。

real  $X_1$ 、 $X_2$  の設定

式(1.147)の実部とFマトリクスの積を計算します。C31セルからD31セルを同時に選択し、数式窓に

=TRANSPOSE(MMULT(MINVERSE(-1\*B31^2\*M+K+MMULT(MMULT(B31\*Cm,MINVERSE(-1\*B31^2\*M+K)),B31\*Cm)),F))

と入力し、Ctrl+Shift+Enter を押し、行列計算の設定を行います。

### img $X_1$ 、 $X_2$ の設定

先に計算した real  $X_1$ 、 $X_2$ を利用して、式(1.147)の虚部と $F$ マトリクスとの積を計算します。E31セルからF31セルを同時に選択し、数式窓に

$$=TRANSPOSE(MMULT(MMULT(MINVERSE(-1*B31^2*M+K),B31*Cm),TRANSPOSE(C31:D31)))$$

と入力し、Ctrl+Shift+Enter を押し、行列計算の設定を行います。

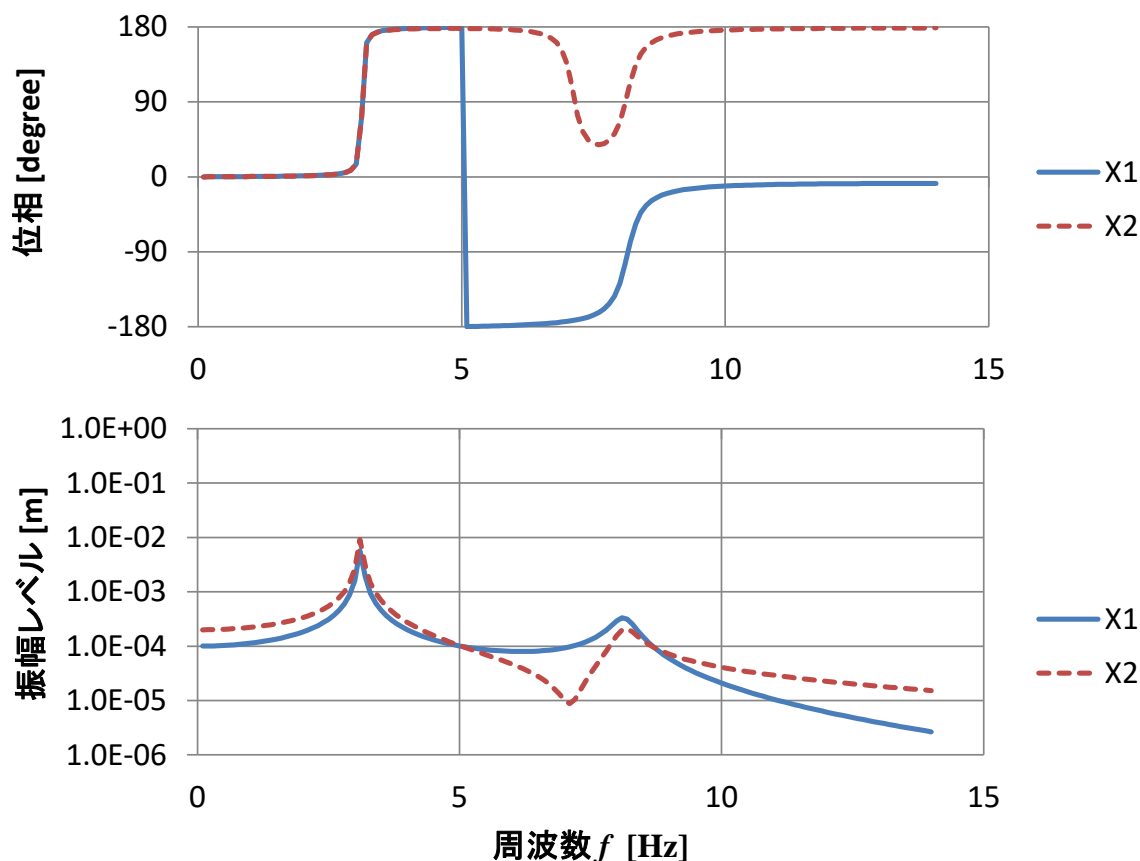
### 振幅レベル $X_1$ 、 $X_2$ の設定

real  $X_1$ 、 $X_2$ と img  $X_1$ 、 $X_2$ からレベルを計算します。  
 G31セル=SQRT(C31^2+E31^2)  
 H31セル=SQRT(D31^2+F31^2)

### 位相 $X_1$ 、 $X_2$ の設定

Atan2 関数を使って、位相角(degree)を計算します。  
 I31セル=ATAN2(C31,E31)\*180/PI()  
 J31セル=ATAN2(D31,F31)\*180/PI()

振幅レベルと位相をグラフに表すと、下図のようになります。



### 1.4.5.剛体の先についたばね その1

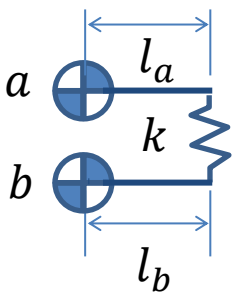
運動方程式でよく使う構成要素である「剛体の先についたばね」の剛性マトリクスを作成する方法を紹介します。

始めに、剛性マトリクスの仕組み、物理法則を整理するために、先の式(1.132)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.148)$$

のばね要素 $k_1$ の剛性マトリクスを観察します。1つめの運動方程式、すなわち1行目の $k_1$ 、 $-k_1$ の意味は、 $x_1$ が1動いた場合に質量 $m_1$ が受けるばねの反力が $k_1$ 、 $x_2$ が1動いた場合に質量 $m_1$ が受けるばねの反力が $-k_1$ であることを示しています。2行目に対しても同様に考えられます。

ここで見方を変え、剛性マトリクスの列方向の意味を考えたいと思います。これは、 $x_1$ が1動いた場合に、質点1に働く力が $k_1$ 、質点2に働く力が $-k_1$ 、すなわち、1つの自由度の変位が運動方程式全体におよぼすばねの力です。この考え方を使えば、複雑な剛性マトリクスを比較的簡単に作ることができます（参考として、機械的に求める方法もアペンディックスに記載します）。



ここでは例として、図（欄外）のような、剛体の先についたばねの $4 \times 4$ の剛性マトリクスを考えます。

まず始めに座標系の方向を決めます。並進方向は、上方向を正。回転方向は右回りを正とします。一方、ばねの反力方向は、正方向変位を妨げる力（下方向、左回り）を正とします。また自由度の順番は、質点 $a$ の上下、回転、質点 $b$ の上下、回転とします。

それでは、剛性マトリクスの1列目から考えていきます。質点 $a$ が上方向に1動いたときばねの反力 $k$ は、剛体の長さ $l_a$ を介して伝えられ（以下、モーメントアームと呼ぶ）、質点 $a$ を右回りに回転させようとしてします。従って、1列目の上側2つは、 $k$ 、 $-kl_a$ です（次ページ式(1.149)を参照）。

次に下側の2つ、質点**b**が受ける力を考えます。ばねの力**k**は、質点**b**を上方向に動かすと同時に、モーメントアーム **$l_b$** によって、左回りに回転させようとしています。従って、1列目の下側2つは **$-k$** 、 **$kl_b$** となります。

それでは続いて、剛性マトリクスの2列目を考えます。質点**a**が右回りに単位角1回転した場合、長さ **$l_a$** の剛体の先についたばねの変位は **$l_a$** （物理ノートでは以下、変位アームと呼ぶ）、従ってばねの反力は **$kl_a$** です。この力は、質点**a**を上方向に動かすと同時に、モーメントアーム **$l_a$** によって左回りに回転させようとしています。従って、2列目の上側2つは **$-kl_a$** 、 **$kl_a^2$** となります。

次に2列目の下側の2つ、質点**b**が受ける力を考えます。ばねの力 **$kl_a$** は、質点**b**を下方向に動かすと同時に、モーメントアーム **$l_b$** によって右回りに回転させようとしています。従って、2列目の下側2つは **$kl_a$** 、 **$-kl_al_b$** となります。

さらに剛性マトリクスの3列目、1行目を考えます。質点**b**が上方向に1動いたとき、質点**a**は上方向に動かされるため **$-k$** です。

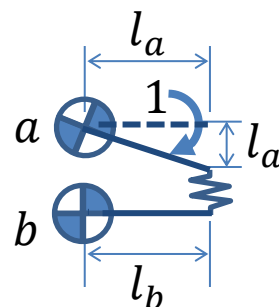
以上のようなプロセスで、剛性マトリクス全体を作成していきませんが、剛性マトリクスの特徴を把握することで、手早く作成することができます。ここまでに考えた剛性マトリクスは

$$\begin{bmatrix} k & -kl_a & -k \\ -kl_a & kl_a^2 & \\ -k & kl_a & \\ kl_b & -kl_al_b & \end{bmatrix} \quad (1.149)$$

です。上式の1列目と1行目は同じ値が並んでいます。このようにn列目とn行目が同じ値になることは、剛性マトリクスの一般的な特徴です。従って、右上の部分は

$$\begin{bmatrix} k & -kl_a & -k & kl_b \\ -kl_a & kl_a^2 & kl_a & -kl_al_b \\ -k & kl_a & & \\ kl_b & -kl_al_b & & \end{bmatrix} \quad (1.150)$$

となります。

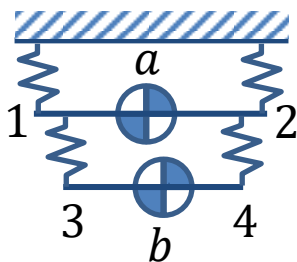


さて、最後に右下の4つの空欄を決定する思考プロセスですが、これは、左上4つの思考プロセスと同じです。違うところは、剛体の長さだけです。従って、左上4つの値を $l_a \rightarrow l_b$ に置き換え

$$\begin{bmatrix} k & -kl_a & -k & kl_b \\ -kl_a & kl_a^2 & kl_a & -kl_al_b \\ -k & kl_a & k & -kl_b \\ kl_b & -kl_al_b & -kl_b & kl_b^2 \end{bmatrix} \quad (1.151)$$

となります。

さて、ここで上式を観察します。上2行と下2行、または左側2列と右側2列の符号が逆になっていることに注目してください。これは、1つの自由度の変位が質点 $a$ と質点 $b$ に及ぼす力は、作用反作用によって逆向きになることに関連しています。この特徴は次項で、より大きな剛性マトリクスを作る時に活用します。



それでは例として、式(1.151)を利用して図(欄外)のような質点系の運動方程式を立てる手順を紹介します。ばね $i$ の座標を $L_i$ 、質点 $a$ 、 $b$ の座標を $L_a$ 、 $L_b$ とし、質点 $a$ からばね $i$ までの距離 $l_{ai}$ 、質点 $b$ からばね $i$ までの距離 $l_{bi}$ を

$$\begin{aligned} l_{ai} &= L_i - L_a \\ l_{bi} &= L_i - L_b \end{aligned} \quad (1.152)$$

と表します。ここで上式は正負の符号を持つ質点からの相対距離です。

次に質量マトリクス $M$ を考えます。ここでは自由度の順番を、質点 $a$ の上下、回転、質点 $b$ の上下、回転の順とし、質量 $m$ 、慣性モーメント $I$ を用いて

$$M = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_b \end{bmatrix} \quad (1.153)$$

と表します。

最後に剛性マトリクス $K$ を考えます。剛性マトリクス $K$ は4つのばねの剛性マトリクス $K_1 \sim K_4$ の合計

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \quad (1.154)$$

と表されます。ここで上式の $K_1$ と $K_2$ は、地面に設置され相手の自由度がないため、剛性マトリクスの左上以外はすべて0となります。従って、 $K_1 \sim K_4$ は式(1.151)より

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 l_{a1} & 0 & 0 \\ -k_1 l_{a1} & k_1 l_{a1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 l_{a2} & 0 & 0 \\ -k_2 l_{a2} & k_2 l_{a2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 l_{a3} & -k_3 & k_3 l_{b3} \\ -k_3 l_{a3} & k_3 l_{a3}^2 & k_3 l_{a3} & -k_3 l_{a3} l_{b3} \\ -k_3 & k_3 l_{a3} & k_3 & -k_3 l_{b3} \\ k_3 l_{b3} & -k_3 l_{a3} l_{b3} & -k_3 l_{b3} & k_3 l_{b3}^2 \end{bmatrix} \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 l_{a4} & -k_4 & k_4 l_{b4} \\ -k_4 l_{a4} & k_4 l_{a4}^2 & k_4 l_{a4} & -k_4 l_{a4} l_{b4} \\ -k_4 & k_4 l_{a4} & k_4 & -k_4 l_{b4} \\ k_4 l_{b4} & -k_4 l_{a4} l_{b4} & -k_4 l_{b4} & k_4 l_{b4}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1.155)$$

と表されます。

同様に、減衰マトリクス $C$ は、式(1.154)、(1.155)を $K_1 \sim K_4 \rightarrow C_1 \sim C_4$ 、 $k_1 \sim k_4 \rightarrow c_1 \sim c_4$ と置き換えた式になります。

以上より、質点モデルに外力 $F_a$ 、 $M_a$ 、 $F_b$ 、 $M_b$ を加える場合の運動方程式は

$$(-M\omega^2 + C\omega + K) \begin{Bmatrix} z_a \\ \theta_a \\ z_b \\ \theta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ M_a \\ F_b \\ M_b \end{Bmatrix} \quad (1.156)$$

となり、上式に式(1.147)を適用し、質点の変位 $z_a$ 、 $\theta_a$ 、 $z_b$ 、 $\theta_b$ が求まります。また、ばね $i$ の上下変位は

$$\begin{aligned}
 z_{ai} &= z_a - \theta_a l_{ai} \\
 z_{bi} &= z_b - \theta_b l_{bi}
 \end{aligned} \quad (1.157)$$

と表され、上式にばね定数をかければ、伝達力を求めることができます。



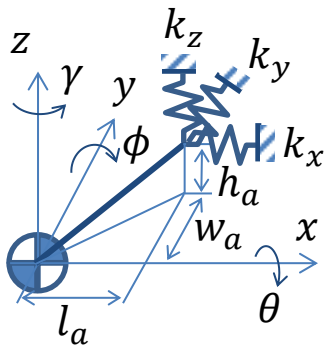
### 1.4.6.剛体の先についたばね その2

前節の「剛体の先についたばね」の剛性マトリクスを3次元に拡張します。前項と同様に、1つの自由度の変位によって生じるばねの力を記述して作成します。

12×12の大きな剛性マトリクスですが、剛性マトリクスの特徴を利用すれば、考える部分は次式の\*の部分だけです。

$$\begin{bmatrix}
 k_x & & & & & & & & & & & \\
 0 & k_y & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & k_z & & & & & & & & & \\
 * & * & * & * & & & & & & & & \\
 * & * & * & * & * & & & & & & & \\
 * & * & * & * & * & * & & & & & & \\
 @ & @ & @ & @ & @ & @ & # & # & # & # & # & # \\
 @ & @ & @ & @ & @ & @ & # & # & # & # & # & # \\
 @ & @ & @ & @ & @ & @ & # & # & # & # & # & # \\
 @ & @ & @ & @ & @ & @ & # & # & # & # & # & # \\
 @ & @ & @ & @ & @ & @ & # & # & # & # & # & # \\
 @ & @ & @ & @ & @ & @ & # & # & # & # & # & #
 \end{bmatrix} \quad (1.158)$$

空欄部分、また@と#の部分はルールに従って埋めることができます。



始めに座標系の方向を決めます。図(欄外)のように並進方向は、 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 軸の矢印方向を正。回転方向は、矢印方向を見て右回りを正とします。一方、反力の方向は、正方向変位を妨げる力を正とします。また自由度の順番は、質点 $a$ の並進3方向 $x_a, y_a, z_a$ 、回転3方向 $\theta_a, \phi_a, \gamma_a$ 、質点 $b$ の並進3方向 $x_b, y_b, z_b$ 、回転3方向 $\theta_b, \phi_b, \gamma_b$ とします。

それでは、剛性マトリクス1列目の4～6行目の\*を考えていきます。質点 $a$ が $x$ 方向に1動いたときの前後方向のばね反力 $k_x$ は、 $x$ 軸周りの回転には影響を及ぼさないため、始めの\*は0です。一方、 $y$ 軸周りに対しては、剛体の上下方向の距離 $h_a$ を介して伝わるモーメントが右回転を妨げるため $k_x h_a$ 。z軸周りに対しては、剛体の左右方向のモーメントアーム $w_a$ を介して伝わるモーメントが右回転を促すため $-k_x w_a$ です。

同様の考えで、2列目の4行目以下の\*は $-k_y h_a, 0, k_y l_a$ 。3列目の4行目以下は $k_z w_a, -k_z l_a, 0$ となります。

次に剛性マトリクス4列目の4行目です。 $x$ 軸周りに単位角1回転した場合、回転軸に対して直角方向の距離をもつ $k_y$ と $k_z$ が、回転を妨げる力を発生します。変位アームを考慮するとばねの力は $k_z w_a$ と $k_y h_a$ です。この力はモーメントアーム $w_a$ 、 $h_a$ を介して $k_z w_a^2 + k_y h_a^2$ となります。またこのとき、ばねの反力 $k_z w_a$ は、モーメントアーム $l_a$ を介して $y$ 軸周りの右回転を促すため、5行目は $-k_z w_a l_a$ 。同様に、ばねの反力 $k_y h_a$ により6行目は $-k_y h_a l_a$ となります。

同様の考えで、5列目の5行目以下の\*は $k_z l_a^2 + k_x h_a^2$ 、 $-k_x w_a h_a$ 。6列目の6行目は $k_y l_a^2 + k_x w_a^2$ となります。以上で\*部分は完成しました。

$$\begin{bmatrix} k_x & & & & & & \\ 0 & k_y & & & & & \\ 0 & 0 & k_z & & & & \\ 0 & -k_y h_a & k_z w_a & k_z w_a^2 + k_y h_a^2 & & & \\ k_x h_a & 0 & -k_z l_a & -k_z w_a l_a & k_z l_a^2 + k_x h_a^2 & & \\ -k_x w_a & k_y l_a & 0 & -k_y l_a h_a & -k_x h_a w_a & k_y l_a^2 + k_x w_a^2 & \end{bmatrix} \quad (1.159)$$

また右上の空欄は、列の値を行に書き写し

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & k_x h_a & -k_x w_a \\ 0 & k_y & 0 & -k_y h_a & 0 & k_y l_a \\ 0 & 0 & k_z & k_z w_a & -k_z l_a & 0 \\ 0 & -k_y h_a & k_z w_a & k_z w_a^2 + k_y h_a^2 & -k_z w_a l_a & -k_y h_a l_a \\ k_x h_a & 0 & -k_z l_a & -k_z w_a l_a & k_z l_a^2 + k_x h_a^2 & -k_x h_a w_a \\ -k_x w_a & k_y l_a & 0 & -k_y h_a l_a & -k_x h_a w_a & k_y l_a^2 + k_x w_a^2 \end{bmatrix} \quad (1.160)$$

となります。

さて、完成まであと少しです。まず@の部分は、剛性マトリクスの特徴から、式(1.160)の符号を反転、モーメントアームの添え字（ハイライト部分）を $a \rightarrow b$ に置き換え

$$\begin{bmatrix} -k_x & 0 & 0 & 0 & -k_x h_a & k_x w_a \\ 0 & -k_y & 0 & k_y h_a & 0 & -k_y l_a \\ 0 & 0 & -k_z & -k_z w_a & k_z l_a & 0 \\ 0 & k_y h_b & -k_z w_b & -k_z w_a w_b - k_y h_a h_b & k_z w_b l_a & k_y h_b l_a \\ -k_x h_b & 0 & k_z l_b & k_z w_a l_b & -k_z l_a l_b - k_x h_a h_b & k_x h_b w_a \\ k_x w_b & -k_y l_b & 0 & k_y h_a l_b & k_x h_a w_b & -k_y l_a l_b - k_x w_a w_b \end{bmatrix} \quad (1.161)$$

となります。

また、#の部分は、式(1.160)の距離に関わる全ての添え字を $a \rightarrow b$ に置き換え

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & k_x h_b & -k_x w_b \\ 0 & k_y & 0 & -k_y h_b & 0 & k_y l_b \\ 0 & 0 & k_z & k_z w_b & -k_z l_b & 0 \\ 0 & -k_y h_b & k_z w_b & k_z w_b^2 + k_y h_b^2 & -k_z w_b l_b & -k_y h_b l_b \\ k_x h_b & 0 & -k_z l_b & -k_z w_b l_b & k_z l_b^2 + k_x h_b^2 & -k_x h_b w_b \\ -k_x w_b & k_y l_b & 0 & -k_y h_b l_b & -k_x h_b w_b & k_y l_b^2 + k_x w_b^2 \end{bmatrix} \quad (1.162)$$

となります。ここまでの、 $12 \times 12$ の剛性マトリクスは、左上部分を\*、左下部分を@、右下部分を#と表せば

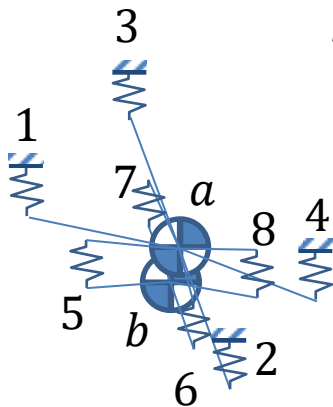
$$\begin{bmatrix} c \\ @ \quad \# \end{bmatrix} \quad (1.163)$$

の部分が完成しました。上式の右上の空欄部分は、@の列の値を行に書き写し、これを@'と表せば、完成した $12 \times 12$ の剛性マトリクスは

$$\begin{bmatrix} * & @' \\ @ & \# \end{bmatrix} \quad (1.164)$$

となります。

例として、図(欄外)のような質点系の運動方程式を立てる手順を紹介します。ばね*i*の座標を $L_i, W_i, H_i$ 、質点*a*、*b*の座標を $L_a, W_a, H_a, L_b, W_b, H_b$ とし、各質点からばね*i*までの距離を



$$\begin{aligned} l_{ai} &= L_i - L_a \\ l_{bi} &= L_i - L_b \\ w_{ai} &= W_i - W_a \\ w_{bi} &= W_i - W_b \\ h_{ai} &= H_i - H_a \\ h_{bi} &= H_i - H_b \end{aligned} \quad (1.165)$$

と表します。ここで上式は正負の符号を持つ相対距離です。

次に質量マトリクス*M*を考えます。ここでは自由度の順番を、質点*a*の並進3方向、回転3方向、質点*b*の並進3方向、回転3方向の順とし、質量 $m_a, m_b$ 、慣性モーメント $I_{xa}, I_{ya}, I_{za}, I_{xb}, I_{yb}, I_{zb}$ 、および慣性乗積 $I_{xya}, I_{xza}, I_{yza}, I_{xyb}, I_{xzb}, I_{yzb}$ を用いて

$$\begin{bmatrix}
 m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I_{xa} & I_{xya} & I_{xza} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I_{xya} & I_{ya} & I_{yza} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I_{xza} & I_{yza} & I_{za} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xb} & I_{xyb} & I_{xzb} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xyb} & I_{yb} & I_{yzb} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{xzb} & I_{yzb} & I_{zb}
 \end{bmatrix} \quad (1.166)$$

と表します。

最後に剛性マトリクス $K$ を考えます。剛性マトリクス $K$ は、式(1.164)で表される8つのばねの剛性マトリクス $K_1 \sim K_8$ の合計

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + K_7 + K_8 \quad (1.167)$$

と表されます。上式の $K_1 \sim K_4$ は地面に接地され、相手の自由度がないため、式(1.164)の\*以外はすべて0です。

$K_1 \sim K_8$ の詳細は割愛します。

以上より、質点モデルに外力を加える場合の運動方程式は

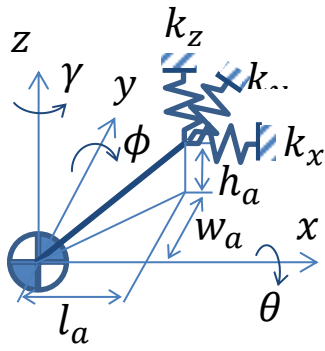
$$(-M\omega^2 + C\omega + K) \begin{Bmatrix} x_a \\ \vdots \\ \gamma_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{xa} \\ \vdots \\ M_{zb} \end{Bmatrix} \quad (1.168)$$

となり、上式に式(1.147)を適用し、質点の変位 $z_a$ 、 $\theta_a$ 、 $z_b$ 、 $\theta_b$ が求まります。また、ばね $i$ の変位 $x_i$ 、 $y_i$ 、 $z_i$ は

$$\begin{aligned}
 x_{ai} &= x_a + \varphi_a h_i - \gamma_a w_i \\
 y_{ai} &= y_a - \theta_a h_i + \gamma_a l_i \\
 z_{ai} &= z_a + \theta_a w_i - \varphi_a l_i \\
 x_{bi} &= x_b + \varphi_b h_i - \gamma_b w_i \\
 y_{bi} &= y_b - \theta_b h_i + \gamma_b l_i \\
 z_{bi} &= z_b + \theta_b w_i - \varphi_b l_i
 \end{aligned} \quad (1.169)$$

と表され、上式の $x_{ai}$ 、 $y_{ai}$ 、 $z_{ai}$ にばね定数をかければ、接地面への伝達力を求めることができます。

## 1.4.7. 剛体の先についたばね その3



前節で作成した2質点、12自由度の計算モデルは、自由度が大きすぎて使いづらい場合があります。そこで、剛性マトリクスの自由度を減らして、計算モデルを簡略化する段取りを示します。

図(欄外)の質点の自由度を $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ 、 $\gamma$ とすれば、ばねの剛性マトリクスは、前節の式(1.160)

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & k_x h_a & -k_x w_a \\ 0 & k_y & 0 & -k_y h_a & 0 & k_y l_a \\ 0 & 0 & k_z & k_z w_a & -k_z l_a & 0 \\ 0 & -k_y h_a & k_z w_a & k_z w_a^2 + k_y h_a^2 & -k_z w_a l_a & -k_y h_a l_a \\ k_x h_a & 0 & -k_z l_a & -k_z w_a l_a & k_z l_a^2 + k_x h_a^2 & -k_x h_a w_a \\ -k_x w_a & k_y l_a & 0 & -k_y h_a l_a & -k_x h_a w_a & k_y l_a^2 + k_x w_a^2 \end{bmatrix} \quad (1.170)$$

で表されます。

計算モデルの簡略化の例として、ばねと質点がおよそ同じ高さにある場合を考えます。上式に $h_a = 0$ を代入し

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_x w_a \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & k_y l_a \\ 0 & 0 & k_z & k_z w_a & -k_z l_a & 0 \\ 0 & 0 & k_z w_a & k_z w_a^2 & -k_z w_a l_a & 0 \\ 0 & 0 & -k_z l_a & -k_z w_a l_a & k_z l_a^2 & 0 \\ -k_x w_a & k_y l_a & 0 & 0 & 0 & k_y l_a^2 + k_x w_a^2 \end{bmatrix} \quad (1.171)$$

とします。ここで、上式の破線の中の自由度 $z$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ に着目すると、破線の枠の上下、左右方向の値が全て0です。これは、自由度 $z$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ と自由度 $x$ 、 $y$ 、 $\gamma$ の間に、ばねによる力のやり取りがないことを意味します。さらに、質量マトリクス $M$ が

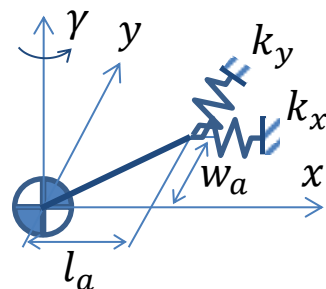
$$\begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ya} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{za} \end{bmatrix} \quad (1.172)$$

のように、非対角成分が0ならば、自由度 $z$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ と自由度 $x$ 、 $y$ 、 $\gamma$ の間には、一切の力のやり取りがありません。

このような場合、自由度 $z$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ と自由度 $x$ 、 $y$ 、 $\gamma$ の運動は別々の運動方程式で解くことができます。

自由度 $x$ 、 $y$ 、 $\gamma$ の運動方程式で用いられる、図(欄外)の剛性マトリクスは

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x w_a \\ 0 & k_y & k_y l_a \\ -k_x w_a & k_y l_a & k_y l_a^2 + k_x w_a^2 \end{bmatrix} \quad (1.173)$$



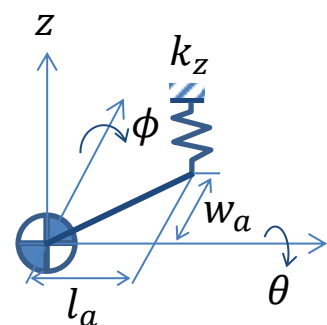
となります。また前節の考え方を活用すれば、2つの質点 $a$ 、 $b$ 間のばねは、質点 $b$ とばねの距離を $l_b$ 、 $w_b$ を用いて

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x w_a & -k_x & 0 & -k_x w_b \\ 0 & k_y & k_y l_a & 0 & -k_y & k_y l_b \\ -k_x w_a & k_y l_a & k_y l_a^2 + k_x w_a^2 & k_x w_a & -k_y l_a & k_y l_a l_b + k_x w_a w_b \\ -k_x & 0 & k_x w_a & k_x & 0 & -k_x w_b \\ 0 & -k_y & -k_y l_a & 0 & k_y & k_y l_b \\ -k_x w_b & k_y l_b & k_y l_a l_b + k_x w_a w_b & -k_x w_b & k_y l_b & k_y l_b^2 + k_x w_b^2 \end{bmatrix} \quad (1.174)$$

となります。

同様に、自由度 $z$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ の運動方程式で用いられる、図(欄外)の剛性マトリクスは

$$\begin{bmatrix} k_z & k_z w_a & -k_z l_a \\ k_z w_a & k_z w_a^2 & -k_z w_a l_a \\ -k_z l_a & -k_z w_a l_a & k_z l_a^2 \end{bmatrix} \quad (1.175)$$



となります。前節の考え方を活用すれば、2つの質点 $a$ 、 $b$ 間のばねは、質点 $b$ とばねの距離を $l_b$ 、 $w_b$ を用いて

$$\begin{bmatrix} k_z & k_z w_a & -k_z l_a & -k_z & -k_z w_b & k_z l_b \\ k_z w_a & k_z w_a^2 & -k_z w_a l_a & -k_z w_a & -k_z w_a w_b & k_z w_a l_b \\ -k_z l_a & -k_z w_a l_a & k_z l_a^2 & k_z l_a & k_z w_b l_a & -k_z l_a l_b \\ -k_z & -k_z w_a & k_z l_a & k_z & k_z w_b & -k_z l_b \\ -k_z w_b & -k_z w_a w_b & k_z w_b l_a & k_z w_b & k_z w_b^2 & -k_z w_b l_b \\ k_z l_b & k_z w_a l_b & -k_z l_a l_b & -k_z l_b & -k_z w_b l_b & k_z l_b^2 \end{bmatrix} \quad (1.176)$$

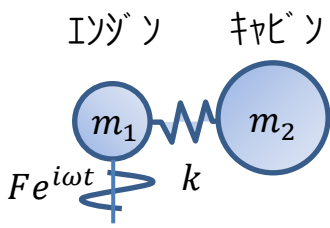
となります。

## 1.5. 2 質点モデルと 3 質点モデル

静かな車作りでは、時と場合に応じて、「共振を離す、合わせる、下げる」ということが必要になるため、共振を決めている質量とばねが分かっていることや、部品の変更で共振をコントロールできることが重要になります。この節では 2 質点モデルと 3 質点モデルを例に、「共振を下げる、合わせる」ことのメリットや、共振を決めている質量とばねについて簡単な式で確認します。

### 1.5.1. 2 質点モデルの防振効果「共振を下げる」

一般に自動車のエンジンはゴムで支持されており、エンジンの強制力に対するキャビンの振動は図(欄外)のような 2 質点モデルで考えることができます。運動方程式



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fe^{i\omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.177)$$

に対し、未定係数法より  $x_1 = X_1 e^{i\omega t}$ 、 $x_2 = X_2 e^{i\omega t}$  と置き、逆行列を使って振動振幅  $X_1$ 、 $X_2$  を求めます。

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.178)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ここで、 $2 \times 2$  の行列の逆行列は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (1.179)$$

であるため、振動振幅  $X_1$ 、 $X_2$  は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + k & k \\ k & -m_1\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}}{(-m_1\omega^2 + k)(-m_2\omega^2 + k) - k^2} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{-m_2\omega^2 + k}{m_1m_2\omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2} F \\ \frac{k}{m_1m_2\omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2} F \end{Bmatrix} \quad (1.180) \end{aligned}$$

と求まります。上式の  $F$  を左辺に移し、変位の伝達関数は

$$\begin{pmatrix} \frac{X_1}{F} \\ \frac{X_2}{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-m_2\omega^2 + k}{m_1m_2\omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2} \\ \frac{k}{m_1m_2\omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2} \end{pmatrix} \quad (1.181)$$

と表されます（欄外に両対数グラフで示す）。また、加速度 $\ddot{x}$ の振幅 $\ddot{X}$ は

$$\begin{aligned} x &= Xe^{i\omega t} \\ \dot{x} &= -\omega Xe^{i\omega t} \\ \ddot{x} &= -\omega^2 Xe^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.182)$$

の関係から

$$\ddot{X} = -\omega^2 X \quad (1.183)$$

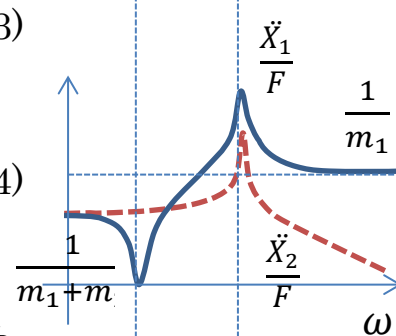
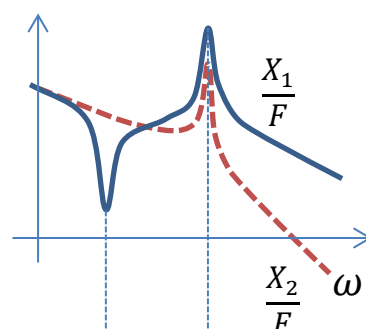
と表せるため、加速度の伝達関数は

$$\begin{pmatrix} \frac{\ddot{X}_1}{F} \\ \frac{\ddot{X}_2}{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-m_2\omega^2 + k}{k(m_1 + m_2) - m_1m_2\omega^2} \\ \frac{k}{k(m_1 + m_2) - m_1m_2\omega^2} \end{pmatrix} \quad (1.184)$$

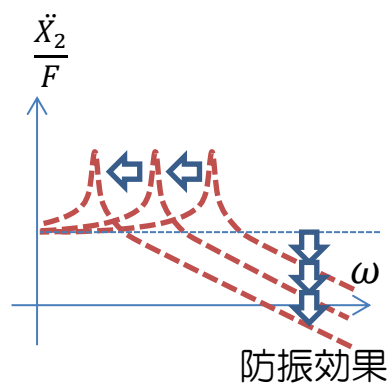
となります。エンジンをゆっくり押したとき、すなわち上式に $\omega = 0$ を代入すれば $\ddot{X}_1/F = \ddot{X}_2/F$ となり、エンジンとキャビンが一緒に動くことがわかります。一方で、エンジンを速く（高い周波数で）動かした場合、図（欄外）のようにキャビンの振動振幅 $\ddot{X}_2/F$ はエンジンに比べて小さくなります。

キャビンの振動振幅 $\ddot{X}_2/F$ は右肩下がりの特性となるため、共振周波数が低いほど振動低減の効果が高くなります。これを防振効果と呼び、自動車ではエンジンを柔らかいゴムで支持し、共振周波数より高いエンジン回転数を使うことで、エンジンの振動を直接キャビンに伝えないようにしています。

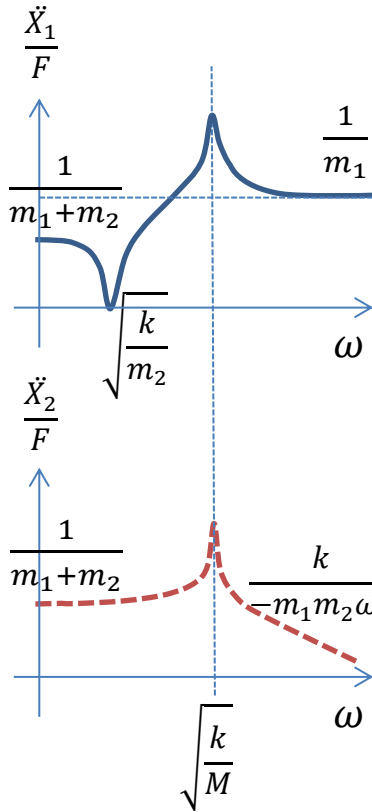
防振によって高い周波数の振動を遮断する一方で、共振周波数付近の振動振幅を大幅に増加させます。例えばエンジンを始動するとき、車の揺れを感じるがあると思います。これは、エンジンの回転数が共振周波数を超えるときに振動が増幅されるためです。



$$\sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}}$$







ここで、振動現象を大局的に理解するために、式(1.184)の  $\omega = 0$  と、 $\omega = \infty$  での質点の振る舞いを式で確認します。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\ddot{X}_1}{F} \\ \frac{\ddot{X}_2}{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-m_2\omega^2 + k}{k(m_1 + m_2) - m_1m_2\omega^2} \\ \frac{k}{k(m_1 + m_2) - m_1m_2\omega^2} \end{Bmatrix} \quad (1.185)$$

上式において、 $\omega = 0$  の場合

$$\begin{Bmatrix} \frac{\ddot{X}_1}{F} \\ \frac{\ddot{X}_2}{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{m_1 + m_2} \\ \frac{1}{m_1 + m_2} \end{Bmatrix} \quad (1.186)$$

となります。ここで、エンジン  $m_1$  を手の平、キャビン  $m_2$  を水風船、 $F$  を腕の筋力と考えると、手をゆっくり動かせば  $m_1$ 、 $m_2$  が一体で動くことがイメージできると思います。

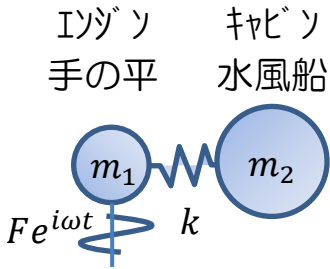
$\omega = \infty$  の場合

$\omega^2$  項は定数項に比べて非常に大きくなるため、定数項を無視すると

$$\begin{Bmatrix} \frac{\ddot{X}_1}{F} \\ \frac{\ddot{X}_2}{F} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ \left(\frac{k}{-m_1\omega^2}\right) \cdot \frac{1}{m_2} \end{Bmatrix} \quad (1.187)$$

となります。上式 1 行目に水風船の質量  $m_2$  が含まれないことから、手を早く動かすとき、腕は手の重さだけを動かしていることとなります。また、その変位  $X_1$  は式(1.104)の関係より  $X_1 = -F/m_1\omega^2$  です。

ここで上式 2 行目の大括弧の中の意味について考えてみます。水風船にとって、手の平は強制的に  $X_1$  で変位している状況にあるため、水風船に伝わる力を  $N$  とすると  $N = kX_1 = -kF/m_1\omega^2$  と考えることができます。従って、手が重いほど、ばねが柔らかいほど、水風船へ伝わる力  $N$  は小さくなります。また、水風船の加速度  $\ddot{X}_2$  は、水風船の質量  $m_2$  が重いほど小さくなります。少々感覚的な説明になりましたが、これが上式 2 行目の解釈であり、防振の基本的な考え方になります。



### 1.5.2.2 質点モデルの共振周波数 その1

狙い通りの防振効果を得るためには、共振を決めている質量とばねを把握し、共振周波数をコントロールする必要があります。ここでは、図(欄外)の2質点モデルの共振周波数の成り立ちについて考えてみます。

伝達関数が $\infty$ となる周波数 $\omega$ が共振周波数であるため、2質点モデルの共振周波数 $\omega_0$ は式(1.184)の分母=0から、次のように求められます。

$$k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \quad (1.188)$$

上式は、1質点の共振周波数 $\omega = \sqrt{k/m}$ に比べて馴染みづらい形です。そこで、上式を次のように整理します。

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}}} \quad (1.189)$$

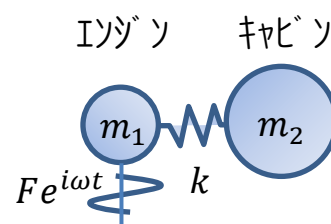
ここで、上式の質量 $m_1$ 、 $m_2$ を直列ばねの式のように

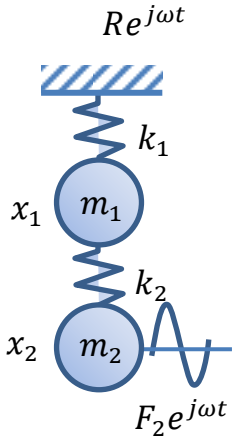
$$M = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad (1.190)$$

と置けば、式(1.189)は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (1.191)$$

と簡略化されます。上式の $M$ は、式(1.190)の直列ばねの式と同じ形のため、質量の小さい方の影響が大きくなります。例えば、質点 $m_1$ と $m_2$ がキャビンとエンジンならば、この共振を決めている質量はエンジンになります。





### 1.5.3.2 質点モデルの防振効果

共振周波数を低くすることで、得られる防振効果を伝達関数で確認します。

前節で整理した運動方程式の立て方を用いれば、図(欄外)の2質点モデルの運動方程式は

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (1.192)$$

となります。振動振幅 $X_1$ 、 $X_2$ は逆行列を両辺に乗じて

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}}{(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1 k_2} F_2 \\ \frac{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1 k_2} F_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.193)$$

と求まります。接地点の伝達力 $R$ は上式の質点1の振動振幅 $X_1$ に $k_1$ を乗じ

$$R = k_1 X_1 = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1 k_2} F_2 \quad (1.194)$$

です。ここで、周波数 $\omega$ が十分高い場合、上式は

$$\frac{R}{F_2} \approx \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2 \omega^4} \quad (1.195)$$

と近似でき、入力点から接地点までのばねと質量の掛け算で表されます。上式の $m_1$ 、 $k_1$ 、 $m_2$ 、 $k_2$ を $\sqrt{k_1/m_1} \equiv \omega_1$ 、 $\sqrt{k_2/m_2} \equiv \omega_2$ に置き換えれば

$$\frac{R}{F_2} \approx \frac{k_1/m_1}{\omega^2} \cdot \frac{k_2/m_2}{\omega^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \quad (1.196)$$

さらに分母の周波数 $\omega$ を固有振動数 $f$ に置き換えるために、 $\omega = 2\pi f$ 、 $\omega_1 = 2\pi f_1$ 、 $\omega_2 = 2\pi f_2$ を代入すれば

$$\frac{R}{F_2} \approx \frac{(2\pi f_1)^2}{(2\pi f)^2} \cdot \frac{(2\pi f_2)^2}{(2\pi f)^2} = \left(\frac{f_1}{f}\right)^2 \left(\frac{f_2}{f}\right)^2 \quad (1.197)$$

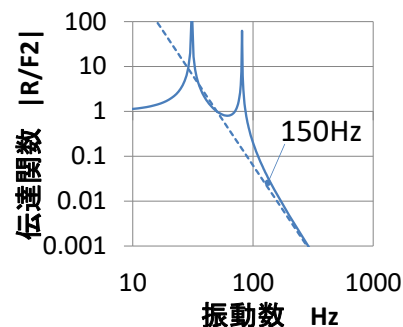
となります。単体系の固有振動数 $f_1$ 、 $f_2$ が小さいほど伝達関数 $R/F_2$ が小さくなります。物理ノートでは、 $f_1 f_2$ を防振素性と定義します。

上式より例えば、 $f = 150\text{Hz}$ において、強制力 $F_2$ を100分の1倍に防振したい場合、固有振動数 $f_1 = 50.0\text{Hz}$

( $m_1 = 24.3 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 2400 \text{ N/mm}$ )、固有振動数  
 $f_2 = 50.0 \text{ Hz}$ 、( $m_2 = 24.3 \text{ kg}$ ,  $k_2 = 2400 \text{ N/mm}$ )とすれば

$$\frac{R}{F_2} \approx \left(\frac{50}{150}\right)^2 \left(\frac{50}{150}\right)^2 = 0.0123 \quad (1.198)$$

およそ 100 分の 1 倍となります。



次に、質点 1 に力を加える場合を確認します。式(1.193)の外力を  $F_2$  から  $F_1$  に置き換えて

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2} \\ &= \frac{-m_2\omega^2 + k_2}{m_1m_2\omega^4 - \{k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1k_2} F_1 \\ &= \frac{-m_2\omega^2 + k_2}{m_1m_2\omega^4 - \{k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1k_2} F_1 \end{aligned} \quad (1.199)$$

と求まります。接地点の伝達力  $R$  は上式の質点 1 の振動振幅  $X_1$  に  $k_1$  を乗じ

$$R = \frac{k_1(-m_2\omega^2 + k_2)}{m_1m_2\omega^4 - \{k_1m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1k_2} F_1 \quad (1.200)$$

となります。ここで、周波数  $\omega$  が十分高い場合、上式は

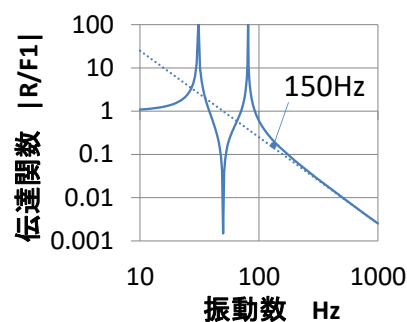
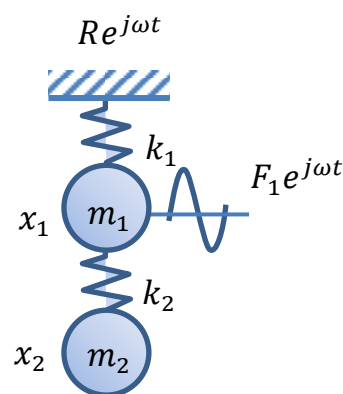
$$\frac{R}{F_1} \approx \frac{k_1m_2\omega^2}{m_1m_2\omega^4} = \frac{k_1}{m_1\omega^2} = \left(\frac{f_1}{f}\right)^2 \quad (1.201)$$

と近似できます。ここで注目したいのは、伝達関数  $R/F_1$  は入力点から接地点までのばね  $k_1$  と質量  $m_1$  だけで決まり、 $m_2$  と  $k_2$  は無関係であることです。その理由は次のように説明されます。「共振周波数より十分高い周波数の質点の変位は、ばねの硬さに関係なく、 $F = ma$  で決まる」ため、「隣の要素への伝達力は、 $F = ma$  で決まった変位にばね定数をかける」だけです。

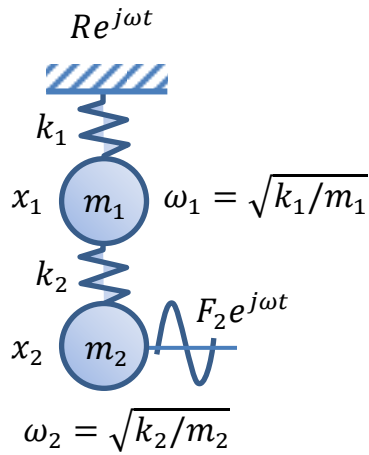
上式より例えば、 $f = 150 \text{ Hz}$  において、強制力を 10 分の 1 としたい場合、固有振動数  $f_1 = 50.0 \text{ Hz}$  ( $m_1 = 24.3 \text{ kg}$  と  $k_1 = 2400 \text{ N/mm}$ ) とすれば

$$\frac{R}{F_1} \approx \left(\frac{50}{150}\right)^2 = 0.111 \quad (1.202)$$

およそ 10 分の 1 倍となります。



## 1.5.4.2 質点モデルの共振周波数 その2



防振によって生じる共振ピークが問題とならないように、固有振動数をコントロールします。ここでは例として、図(欄外)のモデルの1つ目の固有振動数を20Hzとし、かつ防振効果を最大化(式(1.97)の分子 $f_1 f_2$ を小さく)する $k_1$ 、 $k_2$ の決め方を考えます。運動方程式は

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (1.203)$$

です。振動振幅 $X_1$ 、 $X_2$ は逆行列を両辺に乗じて

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}}{(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2} \quad (1.204)$$

となります。共振周波数 $\omega$ は振動振幅が $\infty$ となる分母=0の条件から次のように求められます。

$$\begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2 &= 0 \\ m_1 m_2 \omega^4 - \{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2\}\omega^2 + k_1 k_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.205)$$

$$\omega^2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2 \pm \sqrt{\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2\}^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}$$

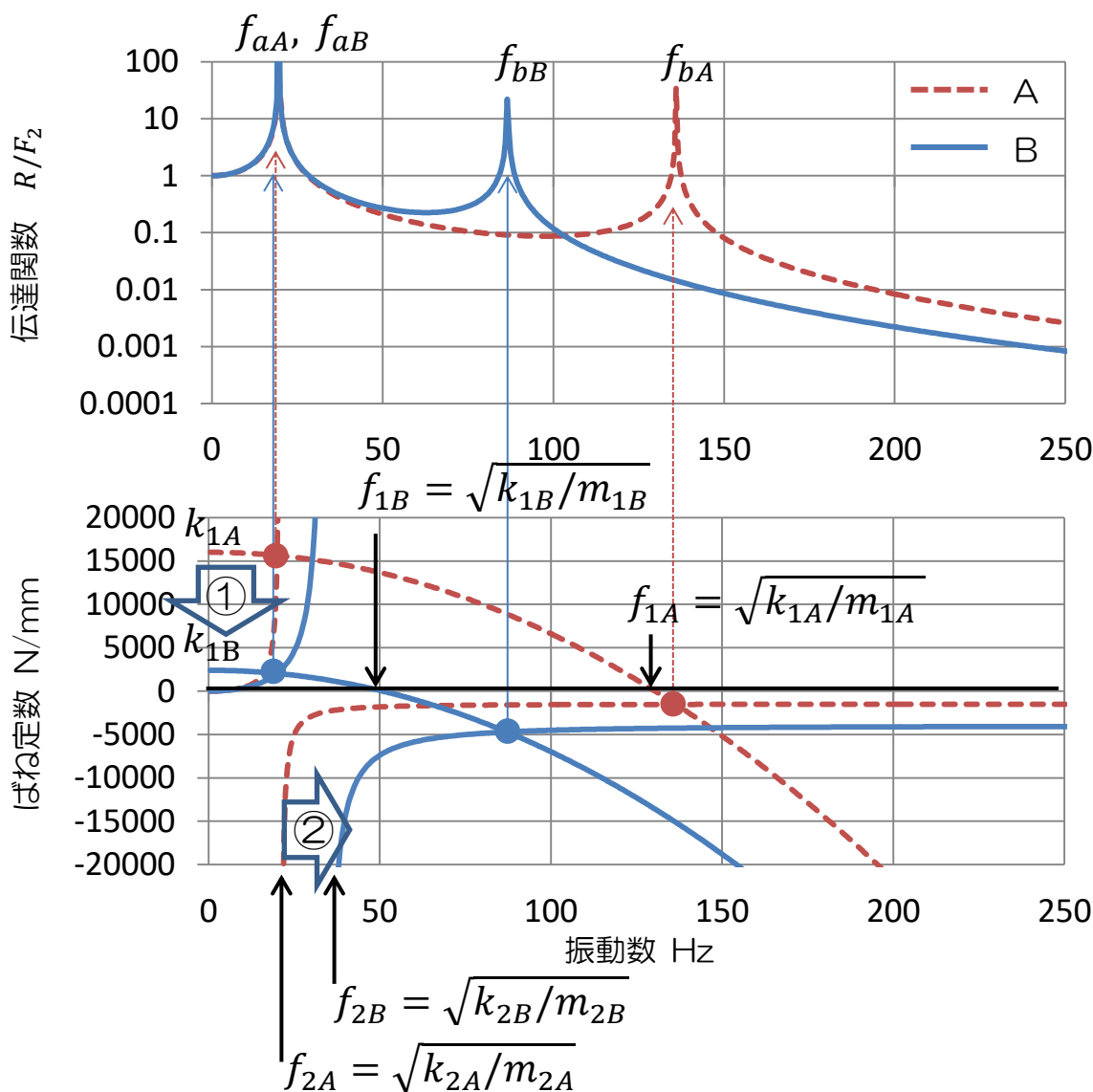
上式は複雑な式であり、共振周波数 $\omega$ と $k_1$ 、 $k_2$ の関係を読み解くのは困難です。そこで式(1.95)を $\omega$ について解かず次のように変形します。

$$\begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2 &= 0 \\ -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 &= \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2} \end{aligned} \quad (1.206)$$

$$-m_1\omega^2 + k_1 = \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2} - k_2$$

上式は「周波数 $\omega$ を $0 \rightarrow \infty$ にスイープしたとき、左辺=右辺となる周波数が共振周波数」であることを意味します。下表の条件A、Bにおける、式(1.194)、式(1.206)の左辺と右辺をグラフに示します。横軸は振動数 $f = \omega/2\pi$ です。

	単位	初期条件 A	条件 B
$m_1$	kg	24	24
$m_2$	kg	90	90
$k_1$	N/mm	16000	2400
$k_2$	N/mm	1500	4000



式(1.206)の左辺と右辺の交点で共振となることが分かります。

今回の計算例では、1つ目の固有振動数を 20Hz としつつ、防振素性  $f_1 \times f_2$  を最大化する  $k_1, k_2$  を次の手順で考えます。初期条件 A に対し、2つ目の固有振動数を下げるため、ばね定数  $k_{1A}$  を  $k_{1B}$  まで下げます (グラフの①)。その結果、1つ目の固有振動数  $f_a$  が下がるため、ばね定数  $k_{2A}$  を  $k_{2B}$  まで上げます (グラフの②)。

	単位	初期条件 A	条件 B
$f_1$	Hz	129.9	50.3
$f_2$	Hz	20.5	33.6
防振素性 $f_1 \times f_2$	Hz <sup>2</sup>	2670	1689
固有振動数 $f_a$	Hz	19.6	19.5
固有振動数 $f_b$	Hz	86.6	136.0
$f_a \times f_b$	Hz <sup>2</sup>	2670	1689

前ページの表の結果から、防振素性 $f_1 \times f_2 = f_a \times f_b$ となる面白い特徴が確認できます。ここで $f_1 f_2 = f_a f_b$ が常に成り立つかを式で確認しておきます。

式(1.205)は、 $m_1 m_2 \equiv a$ 、 $-\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\} \equiv b$ 、 $k_1 k_2 \equiv c$ 、 $\omega^2 \equiv p$ と置き換えれば

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.207)$$

となります。従って、共振周波数 $p_1 = 2\pi f_a$ 、 $p_2 = 2\pi f_b$ は、次式となります。

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.208)$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.209)$$

ここで $p_1 p_2$ を計算し、次のように整理します。

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned} \quad (1.210)$$

上式に $a = m_1 m_2$ 、 $c = k_1 k_2$ を代入すれば

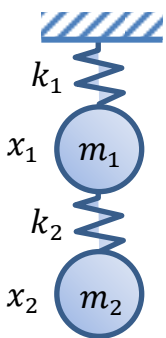
$$p_1 p_2 = \frac{c}{a} = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \quad (1.211)$$

となります。上式左辺に、 $p_1 = 2\pi f_a$ 、 $p_2 = 2\pi f_b$ を代入、右辺に図(欄外)のモデルに示した $\sqrt{k_1/m_1} = 2\pi f_1$ 、 $\sqrt{k_2/m_2} = 2\pi f_2$ を代入すれば

$$\begin{aligned} (2\pi f_a)^2 (2\pi f_b)^2 &= (2\pi f_1)^2 (2\pi f_2)^2 \\ \therefore f_a f_b &= f_1 f_2 \end{aligned} \quad (1.212)$$

となります。以上より図(欄外)のモデルでは、 $f_a f_b = f_1 f_2$ が常に成り立つ特徴であると分かりました。

これは、「十分高い周波数の伝達関数は、単体系の $f_1$ 、 $f_2$ で考えても、全体系の固有振動数 $f_a$ 、 $f_b$ で考えても同じ」ことを意味します。



$$f_1 = \sqrt{k_1/m_1}$$

$$f_2 = \sqrt{k_2/m_2}$$

### 1.5.5.2 質点モデル 最適解 その1

前項では、手を動かしながら視覚的に解を探りましたが、解析的に求めることもできます。「固有振動数を 20Hz 以上としつつ、防振素性  $f_a \times f_b$  を最大化するばね定数」を Appendix の式から求めます。

式(1.205)の共振周波数  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  を再び示します。

$$\omega_1^2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 + \sqrt{\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\}^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2} \quad (1.213)$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 - \sqrt{\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\}^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2} \quad (1.214)$$

ここで上式を、単に  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $k_1$ 、 $k_2$  の 2 つの関係式と捉えなおし、任意の 2 つの変数を選んで解いた（式変形した）式が Appendix に示してあります。例えば上式を、ばね定数  $k_1$ 、 $k_2$  について解けば

$$k_1 = \frac{m_1(p_1 + p_2) \pm \sqrt{m_1} \sqrt{m_1(p_1 - p_2)^2 - 4 m_2 p_1 p_2}}{2}$$

$$k_2 = \frac{m_1 m_2 (p_1 + p_2) \mp \sqrt{m_1} m_2 \sqrt{m_1(p_1 - p_2)^2 - 4 m_2 p_1 p_2}}{2(m_1 + m_2)} \quad (1.215)$$

$$p_1 \equiv \omega_1^2 = (2\pi f_a)^2, \quad p_2 \equiv \omega_2^2 = (2\pi f_b)^2$$

となり、固有振動数  $f_a$ 、 $f_b$  とするためのばね定数  $k_1$ 、 $k_2$  が求まります。上式の最も重要な特徴はルートの中の式

$$m_1(p_1 - p_2)^2 - 4 m_2 p_1 p_2 \quad (1.216)$$

です。上式が負になると、ばね  $k_1$ 、 $k_2$  となり現実に作れません。「上式が正となる、2 つの共振周波数  $p_1$ 、 $p_2$  の組み合わせのみが存在」できます。解が存在する範囲をグラフで確認するために、上式を  $p_2$  について解きます。

$$m_1(p_1^2 - 2p_1 p_2 + p_2^2) - 4 m_2 p_1 p_2 > 0$$

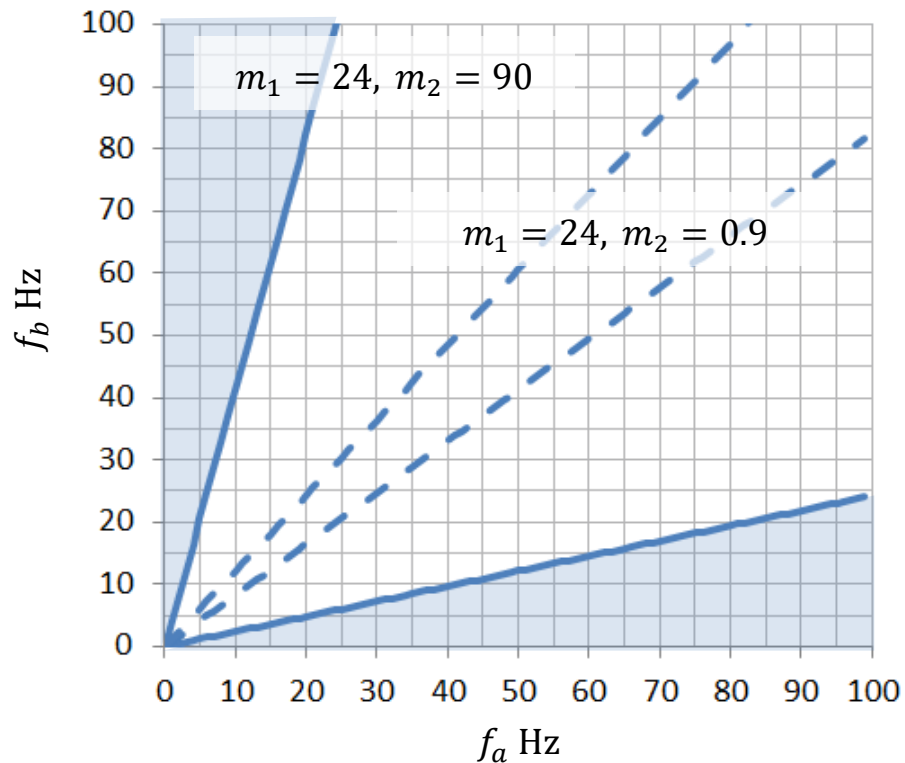
$$m_1 p_2^2 - 2(m_1 + 2m_2)p_1 p_2 + m_1 p_1^2 > 0$$

$$p_2 > \frac{2(m_1 + 2m_2)p_1 \pm \sqrt{4(m_1 + 2m_2)^2 p_1^2 - 4m_1^2 p_1^2}}{2m_1} \quad (1.217)$$

$$> \frac{m_1 + 2m_2 \pm \sqrt{(m_1 + 2m_2)^2 - m_1^2}}{m_1} p_1$$



上式に $m_1 = 24 \text{ kg}$ 、 $m_2 = 90 \text{ kg}$ を代入し、存在できる $f_a$ 、 $f_b$ の組み合わせを示し（色の付いた領域）ます。



上のグラフより、1つ目の固有振動数 $f_a = 20 \text{ Hz}$ を選んだ場合、2つ目の固有振動数 $f_b$ は $5 \text{ Hz}$ 以下と、 $83 \text{ Hz}$ 以上のみ存在できます。以上より「固有振動数を $20 \text{ Hz}$ 以上としつつ、防振素性 $f_a \times f_b$ を最大化するばね定数 $k_1, k_2$ 」は、 $f_a = 20 \text{ Hz}$ 、 $f_b = 83 \text{ Hz}$ を式(1.215)に代入し、 $k_1 = 3037 \text{ N/mm}$ 、 $k_2 = 3055 \text{ N/mm}$ と求まります。

参考に、 $m_1 = 24 \text{ kg}$ 、 $m_2 = 0.9 \text{ kg}$ の上式を破線で示します。 $m_1 > m_2$ となるほど解が存在する範囲が広くなり、最低固有振動数 $f_a$ と防振素性 $f_a \times f_b$ は両立しやすくなります。

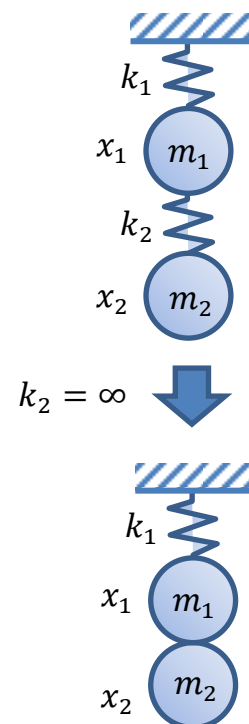
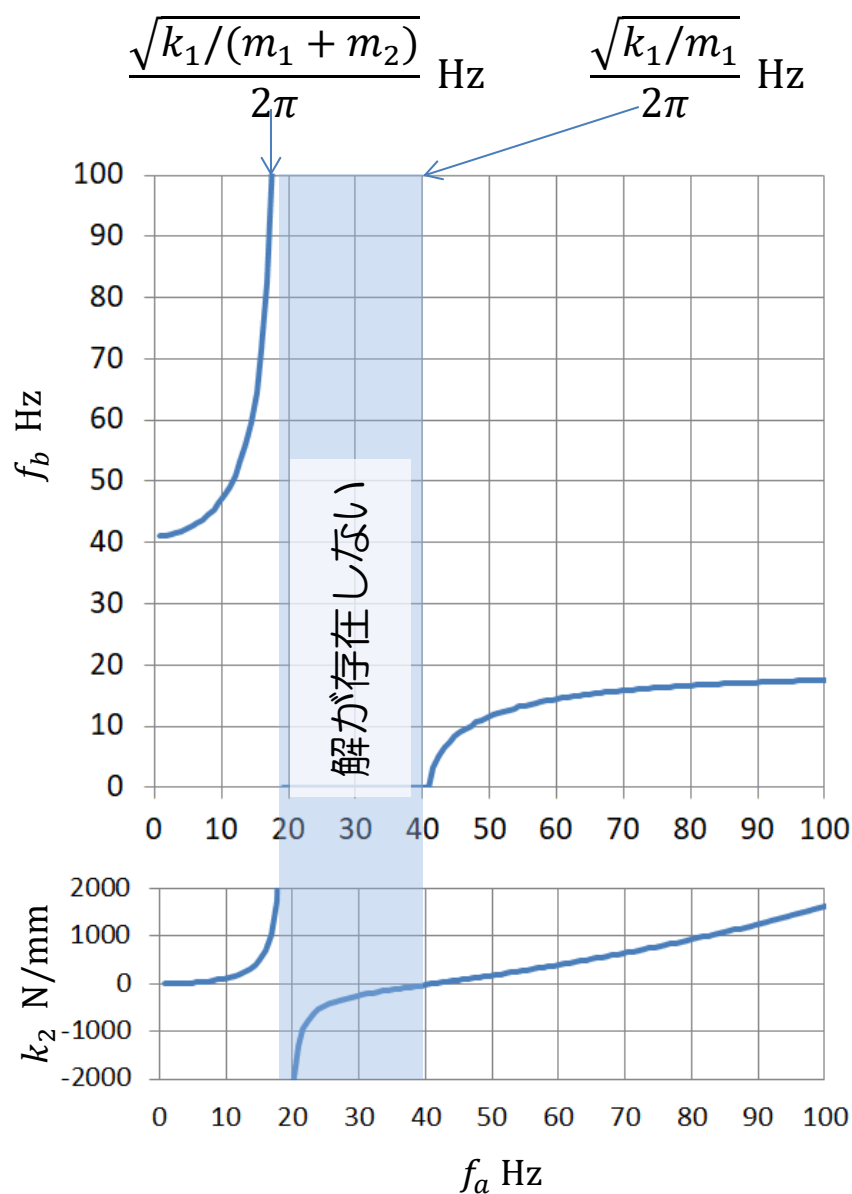
### 1.5.6.2 質点モデル 最適解 その2

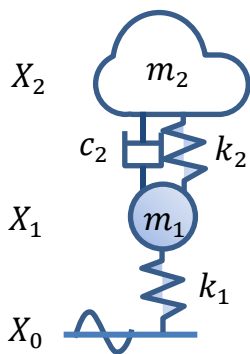
さらに前項の応用問題として、ばね定数 $k_1$ は変えず $k_2$ のみで「固有振動数を $20 \text{ Hz}$ 以上としつつ、防振素性 $f_a \times f_b$ を最大化するばね定数 $k_2$ 」を確認します。式(1.213)、(1.214)を $k_2, p_2$ について解いた式は Appendix より

$$\begin{aligned}
 k_2 &= \frac{m_2 p_1 (-k_1 + m_1 p_1)}{-k_1 + (m_1 + m_2) p_1} \\
 p_2 &= \frac{k_1 (-k_1 + m_1 p_1)}{-k_1 m_1 + m_1 (m_1 + m_2) p_1} \\
 p_1 &\equiv (2\pi f_a)^2, p_2 \equiv (2\pi f_b)^2
 \end{aligned}
 \tag{1.218}$$

です。上式に $m_1 = 24 \text{ kg}$ 、 $m_2 = 90 \text{ kg}$ 、 $k_1 = 2400 \text{ N/mm}$ を代入しグラフに図示すると、1つ目の固有振動数が $20 \text{ Hz}$ 以上にできない ( $f_a$ 、 $f_b$ のいずれかが必ず $18.85 \text{ Hz}$ 以下となる) ことがわかります。

これは図 (欄外) のモデルではばね定数 $k_2$ をいかに大きくしても、質量 $m_1 + m_2 = 114 \text{ kg}$ とばね $k_1 = 2400 \text{ N/mm}$ で決まる固有振動数 $18.85 \text{ Hz}$ を超えられないためです。





### 1.5.7.減衰を含む2質点モデルの防振効果

これまで「ばね定数が小さいほど、防振効果が高い」ことを確認しました。しかし、減衰を含む系では状況が一変します。周波数が高くなるほど、減衰による伝達力が支配的となるためです。式で確認してみます。

図(欄外)の2質点モデルの運動方程式は、前節の「強制変位入力の運動方程式の立て方」に従い、行列の形で

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 + c_2\omega & -k_2 - c_2\omega \\ -k_2 - c_2\omega & -m_2\omega^2 + k_2 + c_2\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 k_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.219)$$

となります。従って振幅 $X_1$ 、 $X_2$ は逆行列を両辺に乘じ

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + k_2 + c_2\omega & k_2 + c_2\omega \\ k_2 + c_2\omega & -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 + c_2\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 k_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2 + c_2\omega)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2} \quad (1.220)$$

$$= \begin{cases} \frac{k_1\{k_2 + \omega(c_2 - m_2\omega)\}}{m_1 m_2 \omega^4 - c_2(m_1 + m_2)\omega^3 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + c_2 k_1 \omega + k_1 k_2} X_0 \\ \frac{k_1(k_2 + c_2\omega)}{m_1 m_2 \omega^4 - c_2(m_1 + m_2)\omega^3 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + c_2 k_1 \omega + k_1 k_2} X_0 \end{cases} \quad (1.221)$$

と求まります。ここで高い周波数 $\omega$ での防振効果を確認するために、上式 $X_2$ を簡略化します。周波数 $\omega$ が十分高いとき、分母は $\omega^4$ の項が支配的となるため

$$X_2 \approx \frac{k_1 k_2 + k_1 c_2 \omega}{m_1 m_2 \omega^4} X_0 \quad (1.222)$$

と近似できます。ここでもし仮に $c_2 = 0$ の場合

$$\frac{X_2}{X_0} \approx \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2 \omega^4} \quad (1.223)$$

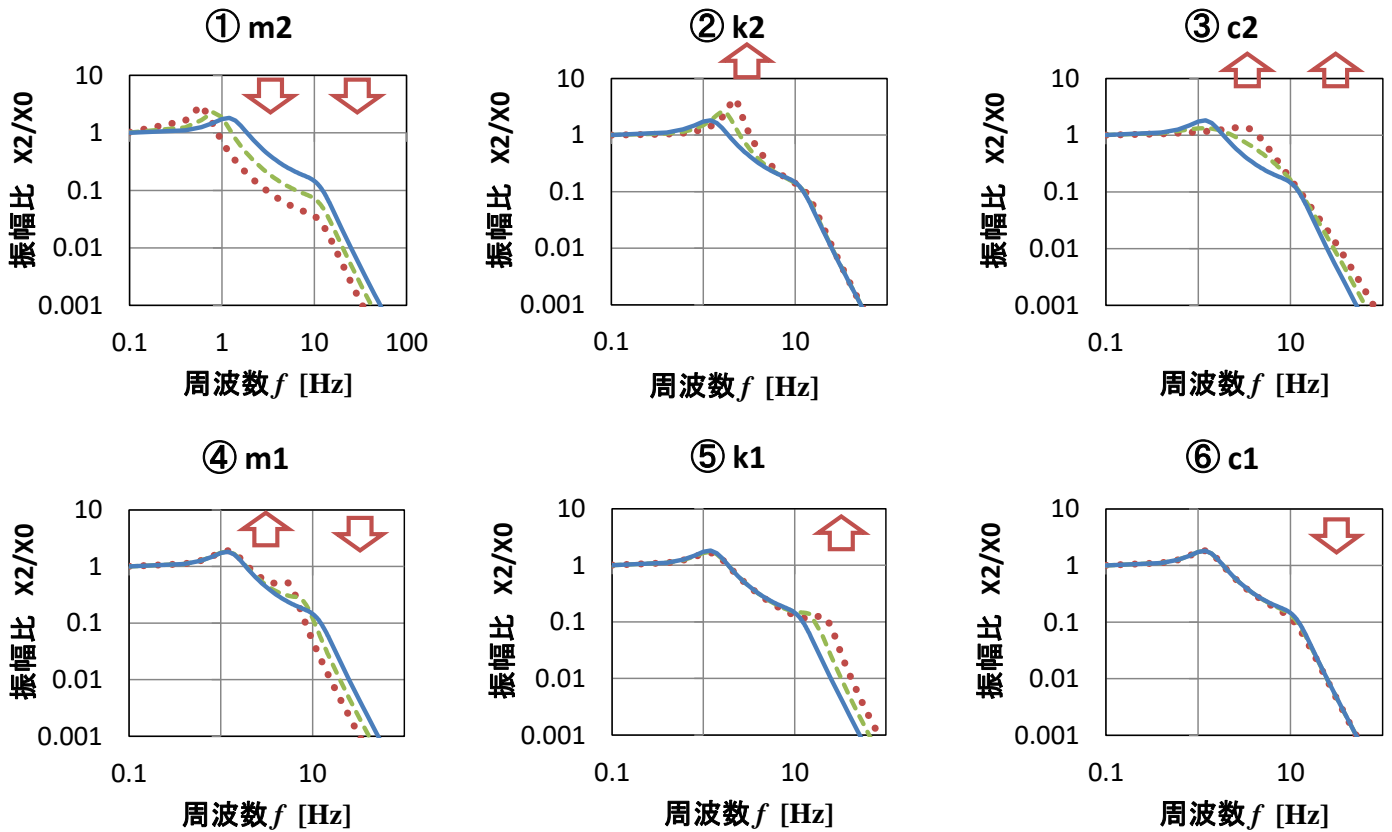
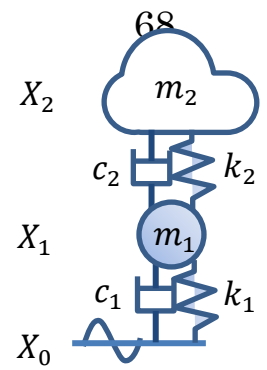
となり、「ばね定数 $k_1$ 、 $k_2$ が小さいほど、防振効果が高い」ことを意味します。一方 $c_2 \neq 0$ の場合、分子は $\omega$ の項が支配的となるため

$$\frac{X_2}{X_0} \approx \frac{k_1 k_2 + k_1 c_2 \omega}{m_1 m_2 \omega^4} \approx \frac{k_1 c_2 \omega}{m_1 m_2 \omega^4} = \frac{k_1 c_2}{m_1 m_2 \omega^3} \quad (1.224)$$

と近似され、「減衰係数 $c_2$ が小さいほど、防振効果が高い」「 $k_2$ は無関係」と分かります。

以上を、図(次ページ欄外)の2質点モデルで確認します。ばね上質量 $m_2 = 750\text{kg}$ 、ばね下質量 $m_1 = 100\text{kg}$ 、アブソ

アブソーバーの減衰定数 $c_2 = 5000\text{Ns/m}$ 、コイルスプリングのばね定数 $k_2 = 50\text{N/mm}$ 、タイヤの縦ばね定数 $k_1 = 500\text{N/mm}$ 、タイヤの減衰定数 $c_1 = 5000\text{Ns/m}$ を基準（青）1を示します。グラフより、2つの共振ピークが、およそ1Hzと10Hzにあります。

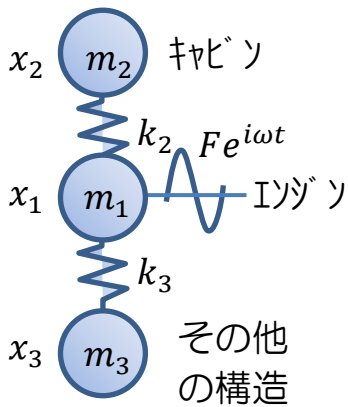


始めに、2つの共振ピークより高い10～100Hz（以下、単に高い周波数といいます）に着目し、式(1.224)とグラフの対応を整理します。

式(1.224)のとおり、高い周波数では、コイルスプリングのばね定数 $k_2$ と車の振動レベル $X_2$ は無関係（グラフ②）です。影響があるのは、ばね上質量 $m_1$ （グラフ①）、アブソーバーの減衰定数 $c_2$ （グラフ③）、ばね下質量 $m_2$ （グラフ④）、タイヤの縦ばね定数 $k_1$ （グラフ⑤）です。

次に、1～10Hzに着目します。アブソーバーの減衰定数 $c_2$ は1つ目の共振ピークレベルにのみ影響し（グラフ③）、 $c_2$ が大きすぎると、共振ピークレベルは逆に増加します。これは、 $c_2$ によって、 $m_1$ と $m_2$ が剛結合され、減衰のない1自由度振動系になるためです（1Hzと10Hzの2つの共振ピークが徐々に近づき1つの共振ピークになる）。

### 1.5.8.3 質点モデルの共振周波数



共振をコントロールするためには、共振を決めている質量とばねを把握することが重要です。その際、どんなに複雑な構造でも、まずは1つのばねと質量に置き換えて考えることがエンジニアの知恵です。

しかし、どうしても1つのばねマスだけでは説明が難しい場合もあります。ここでは、3質点モデルの共振を決めるばねと質量について簡単な式で確認します。

前節で整理した運動方程式の立て方を用いれば、図(欄外)の3質点モデルの運動方程式は行列の形で

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & -m_3\omega^2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.225)$$

と書き出せます。上式から質点1の振動振幅 $X_1$ について解きます。始めに、上式の2行目、3行目の式を変形し $X_2$ 、 $X_3$ を $X_1$ で表します。

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{k_2}{-m_2\omega^2 + k_2} X_1 \\ X_3 &= \frac{k_3}{-m_3\omega^2 + k_3} X_1 \end{aligned} \quad (1.226)$$

上式を式(1.225)の1行目に代入し、質点1の変位の振幅 $X_1$ は

$$\left( -m_1\omega^2 + k_2 + k_3 - \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2} - \frac{k_3^2}{-m_3\omega^2 + k_3} \right) X_1 = F \quad (1.227)$$

$$X_1 = \frac{F}{-m_1\omega^2 + \left( k_2 - \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2} \right) + \left( k_3 - \frac{k_3^2}{-m_3\omega^2 + k_3} \right)}$$

と求まります。

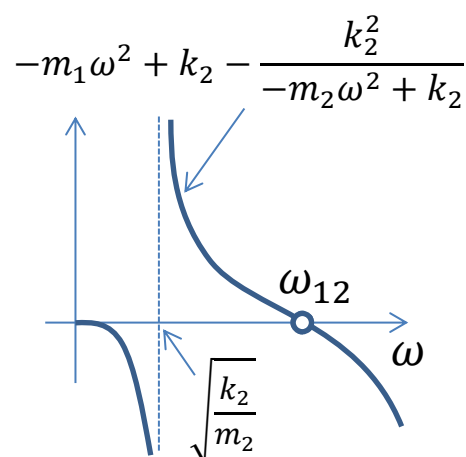
上式の分母=0となる $\omega$ が3質点モデルの共振周波数です。上式の分母に着目して、質量 $m_3$ とばね $k_3$ が2質点モデル $m_1$ 、 $m_2$ 、 $k_2$ の共振周波数に及ぼす影響について考えていきます。

始めに質点3を加える前の質点1と2の共振周波数 $\omega_{12}$ を確認しておきます。これは上式の分母において $k_3 = 0$ の場合を考えればよく

$$-m_1\omega^2 + \left(k_2 - \frac{k_2}{-m_2\omega^2 + k_2}\right) = 0 \quad (1.228)$$

となります。上式を $\omega$ について解けば、質点1と2の共振周波数が求まりますが、後で質点3を加えたときの影響を考えやすくするために、共振周波数をグラフから読み取る方法を使います。上式は左辺が0となる $\omega$ が共振周波数であることを意味するため、上式を右図のグラフにプロットすれば横軸との交点が共振周波数 $\omega_{12}$ になります。

グラフから共振周波数 $\omega_{12}$ を読み取る

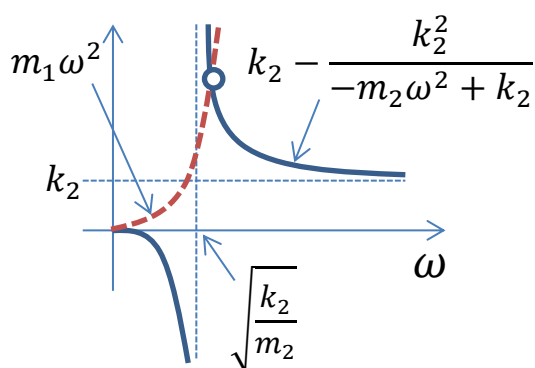


さて、ここで共振周波数 $\omega_{12}$ を決めている質量とばねを明らかにしたいと思います。上式の添え字1の変数を右辺に移すと

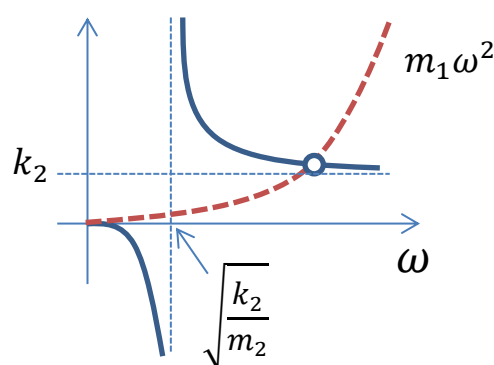
$$k_2 - \frac{k_2}{-m_2\omega^2 + k_2} = m_1\omega^2 \quad (1.229)$$

となります。上式は、左辺と右辺が等しくなる $\omega$ が共振周波数であることを意味します。左辺を実線、右辺を破線として下図に示します。 $m_1$ が大きいほど（左下の図）実線と破線の交点は $\sqrt{k_2/m_2}$ に近づくため、質点1と2の共振周波数を決めている質量とばねは $m_2, k_2$ と言えます。一方、 $m_1$ が小さい場合（右下の図）、 $m_1\omega^2$ は横方向の直線 $k_2$ の近くで交わるため、質点1と2の共振周波数を決めている質量とばねは $m_1, k_2$ ということになります。これは、式(1.190)で考えたように、2質点モデルの共振周波数は、軽い方の質量で決まることに対応しています。

$m_1$ が大きい場合



$m_1$ が小さい場合



では、最後に質点 3 を含めた系の共振周波数を考えます。式(1.227)の分母=0 より

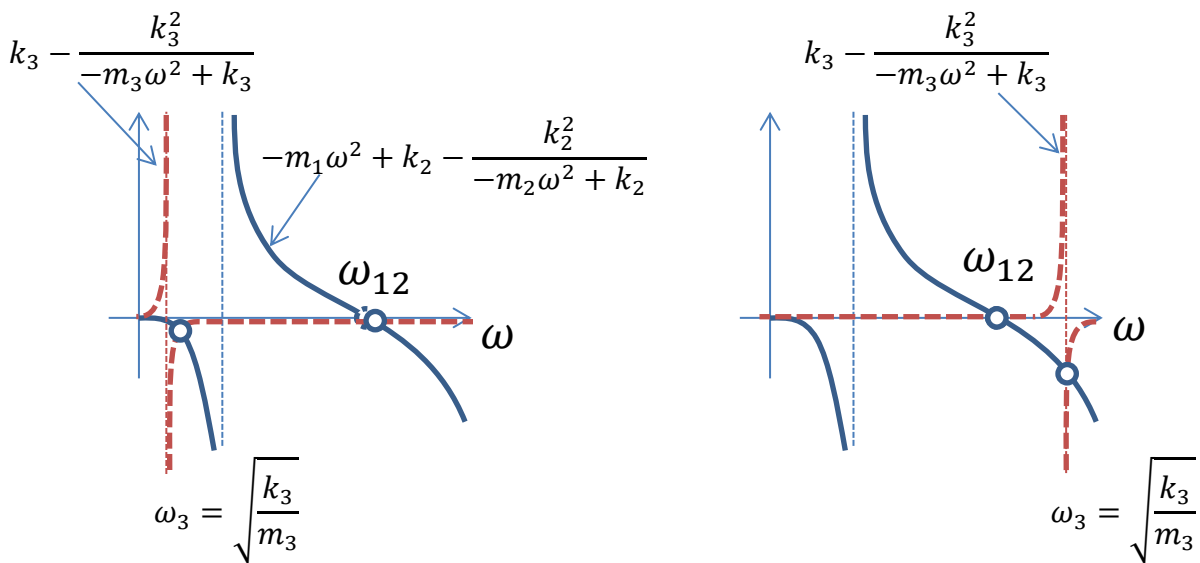
$$-m_1\omega^2 + \left(k_2 - \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2}\right) + \left(k_3 - \frac{k_3^2}{-m_3\omega^2 + k_3}\right) = 0 \quad (1.230)$$

です。上式の添え字 3 の変数を右辺に移します。

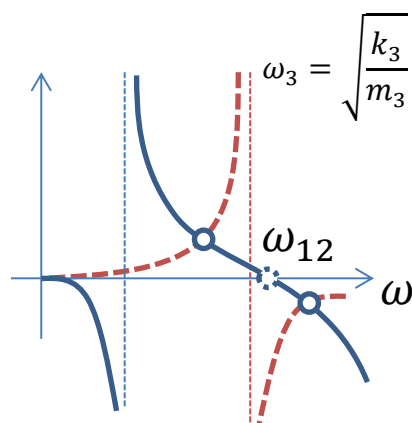
$$-m_1\omega^2 + \left(k_2 - \frac{k_2^2}{-m_2\omega^2 + k_2}\right) = -\left(k_3 - \frac{k_3^2}{-m_3\omega^2 + k_3}\right) \quad (1.231)$$

上式は、左辺と右辺が等しくなる $\omega$ が共振周波数であることを意味しています。左辺を実線、右辺を破線として下図の上段に示します。例えば、 $m_3$ と $k_3$ で決まる $\omega_3 = \sqrt{k_3/m_3}$ が先の 2 質点の共振周波数 $\omega_{12}$ から大きく離れている場合、互いの共振周波数の変化は小さくなります。このような状況は、振動の専門用語で互いに「非連成である」と言い、それぞれの共振を独立にコントロールすることができます。

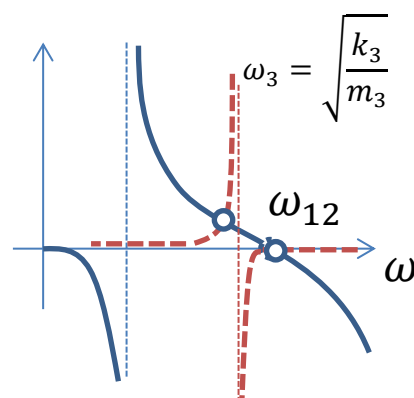
### 互いの共振が離れている場合 共振周波数変化は小さい



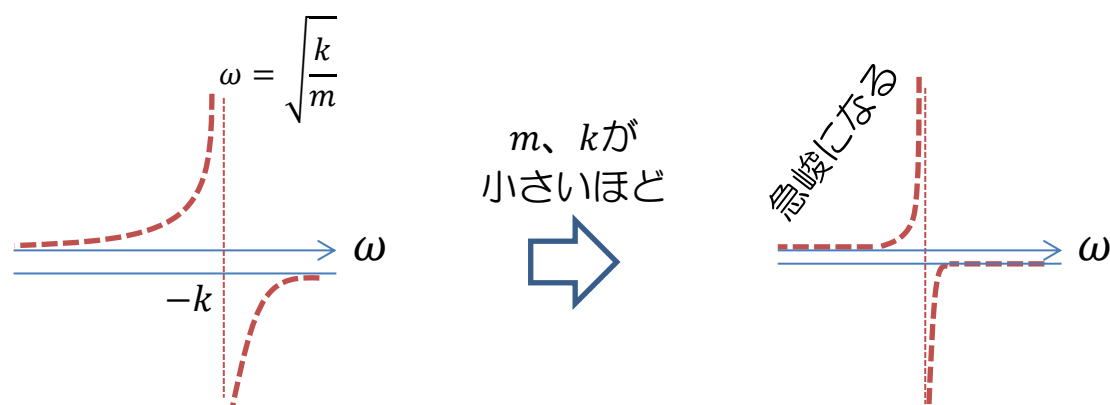
### 互いの共振が近接し 共振周波数が大きい場合



### 互いの共振が近接しても 共振周波数の変化が小さい場合



一方、 $\omega_3 = \sqrt{k_3/m_3}$ が $\omega_{12}$ に近接しすると、前ページ左下の図のように、互いの共振周波数が大きく変化する場合があります、これを「連成」と呼びます。このように2つの共振が「連成」した状態では、それぞれの共振を独立に決めることができません。共振をコントロールするためには、2つ以上の質量やばねを同時に変更する必要があるため、設計が複雑になったり、それぞれの部品の制約によって共振配置の自由度が狭くなる傾向にあります。ただし、共振が近接していても $m_3$ と $k_3$ が相対的に小さい場合は図(前ページ右下)のように共振の変化が小さくなります。これは、式(1.231)の右辺を Excel などを確認すると分かるのですが、 $m_3$ と $k_3$ が小さいほど、グラフの傾きが急峻となるためです。



### 1.5.9.3 質点モデルの伝達関数「共振を合わせる」

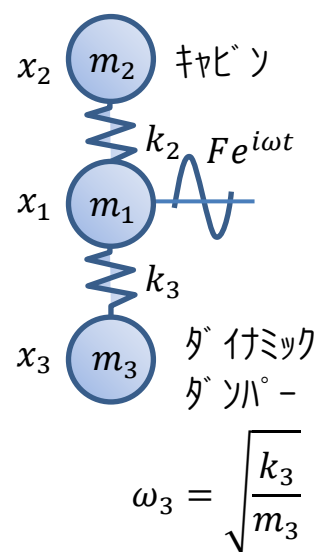
図(欄外)の3質点モデルの質点1から質点2の伝達関数を考えます。式(1.226)に式(1.227)を代入し、 $A_2 = -m_2\omega^2 + k_2$ 、 $A_3 = -m_3\omega^2 + k_3$ と置き換えれば

$$X_2 = \frac{k_2}{A_2} \cdot \frac{F}{-m_1\omega^2 + \left(k_2 - \frac{k_2^2}{A_2}\right) + \left(k_3 - \frac{k_3^2}{A_3}\right)} \quad (1.232)$$

となります。上式の分母分子に $A_2A_3$ をかけて整理し

$$\begin{aligned} \frac{X_2}{F} &= \frac{k_2A_3}{(-m_1\omega^2 + k_2 + k_3)A_2A_3 - k_2^2A_3 - k_3^2A_2} \\ &= \frac{k_2(-m_3\omega^2 + k_3)}{(-m_1\omega^2 + k_2 + k_3)A_2A_3 - k_2^2A_3 - k_3^2A_2} \end{aligned} \quad (1.233)$$

となります。上式の分子に着目すると $\omega = \sqrt{k_3/m_3}$ で、 $X_2$ の振幅レベルが0になります。従って $\sqrt{k_3/m_3}$ を質点1と質点2で決まる共振周波数に合わせることで振動を抑制することができます。このような質量 $m_3$ とばね $k_3$ をダイナミックダンパーと呼びます。



$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m_3}}$$



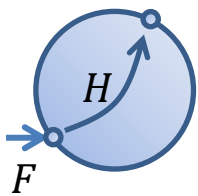
## 1.6. 伝達関数合成法

車は部品が多いため、たくさんの人数で分担して設計します。また、派生車をたくさん作ります。そこで課題となるのは、タイヤ違い、サスペンション違い、その他諸々の部品が違って、組み合わせた時にちゃんと狙った性能が出ることです。

伝達関数合成法は、その課題を克服する為の1つの手段です。例えば、タイヤからキャビンまでを2つに分け、2つに分けた互いの結合点で守るべき伝達関数を決めて、各々の開発を行います。この目標の伝達関数を守れば、合わせた時に狙いの性能が出せます。



$$X = HF$$



### 1.6.1. 直列結合の考察「共振を離す」

まずは、2つに分かれているものを合わせたときに、全体としてどのような伝達関数になるかを考えます。図(欄外)のように、物体に外力 $F$ を加えた時の変位 $X$ は、変位の伝達関数 $H$ を使って

$$X = HF \quad (1.234)$$

と表されます。今、図(欄外)のように、分系1、2各々における伝達関数 $H_{11}$ 、 $H_{12}$ 、 $H_{33}$ 、 $H_{34}$ は既に測定して分かっているものとします。また、物理法則より $H_{12} = H_{21}$ 、 $H_{34} = H_{43}$ です(詳細は式(1.300)の導出を参照ください)。

ここで、点2と点3をばね $k$ で結合して合わせた後の点1から点4の伝達関数を考えます。図(欄外下)のように、結合したときのばねの反力 $R$ を考慮すれば、次のような連立方程式を立てることができます。

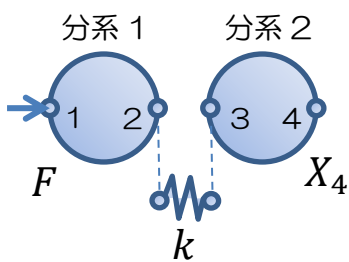
$$\begin{aligned} X_1 &= H_{11}F + H_{21}(-R) \\ X_2 &= H_{12}F + H_{22}(-R) \\ X_3 &= H_{33}R \\ X_4 &= H_{34}R \end{aligned} \quad (1.235)$$

ここで、ばねの反力 $R$ はフックの法則より

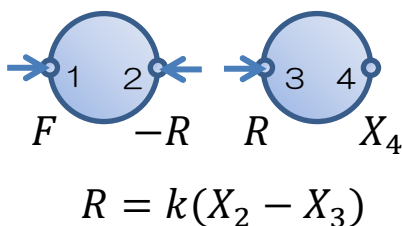
$$R = k(X_2 - X_3) \quad (1.236)$$

の関係があります。以上の連立方程式を $X_4$ について解きます。始めに、ばねの反力 $R$ を求めます。式(1.236)に式(1.235)の2行目と3行目を代入し

2つの系を  
ばねでくっつける



ばねの反力 $R$   
を考慮する



$$\begin{aligned}
 R &= k(X_2 - X_3) \\
 &= k(H_{12}F - H_{22}R - H_{33}R) \\
 \left(\frac{1}{k} + H_{22} + H_{33}\right)R &= H_{12}F \quad (1.237)
 \end{aligned}$$

$$R = \left(\frac{1}{k} + H_{22} + H_{33}\right)^{-1} H_{12}F$$

と求まります。以上より、結合後の $X_4$ は上式を式(1.235)の4行目に代入し

$$\begin{aligned}
 X_4 &= H_{34}R \\
 &= H_{34} \left(\frac{1}{k} + H_{22} + H_{33}\right)^{-1} H_{12}F \quad (1.238)
 \end{aligned}$$

と求まります。

ここで上式を簡略化し、その意味を考えてみます。逆行列部分の単位は $1/k$ の逆行列であるため剛性です。上式の逆行列部分を $k$ と $H_{22}$ と $H_{33}$ の直列ばね $K$ と考えて

$$X_4 = H_{34}K(H_{12}F) \quad (1.239)$$

と置き換えます。上式より $H_{34}$ と $H_{12}$ に含まれる共振ピークを離すことで、 $X_4$ を小さくできることが推察されます。

共振を離すのが難しい場合は、その共振の振動振幅レベルの低い、振動モードの節位置で結合したり、結合位置が振動モードの節になるような構造を設計します。

参考に、結合点が複数ある場合の式(1.239)の計算式を示しておきます。式(1.239)の文字が行列であるとして、行列の計算を行えば解が得られます。

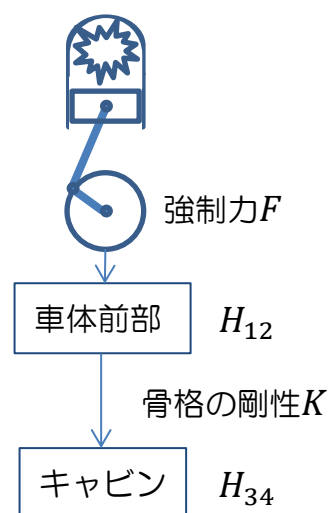
$$X_4 = H_M K_M X_M$$

ここで

$$K_M = \left( \begin{bmatrix} H & \cdots & H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H & \cdots & H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/k_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H & \cdots & H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H & \cdots & H \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (1.240)$$

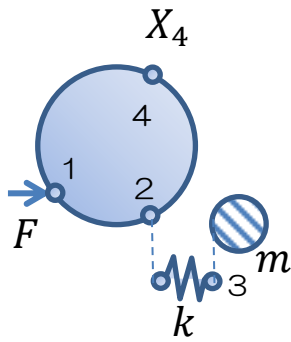
$$H_M = [H \cdots H] \quad X_M = \begin{bmatrix} H & \cdots & H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H & \cdots & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \end{Bmatrix}$$

添え字は省略します。

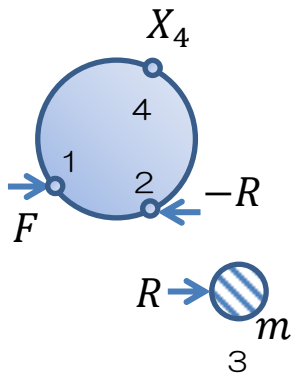


## 1.6.2. ダイナミックダンパーの考察

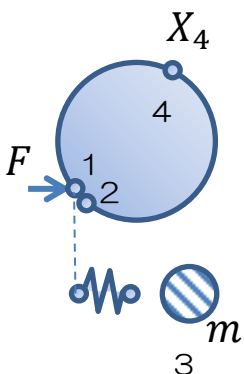
ばねと質点を  
追加する



ばねの反力R  
を考慮する



2を1に  
一致させる



伝達関数合成法を使ってダイナミックダンパーの効果  
を考察します。図（欄外）の1から4への伝達関数 $H_{14}$   
を小さくするために、2の位置にダイナミックダンパーを  
つける場合を考えます。前項と同様に、結合後の変位は  
分系ごとに測定した伝達関数を用いて

$$\begin{aligned} X_1 &= H_{11}F + H_{21}(-R) \\ X_2 &= H_{12}F + H_{22}(-R) \\ X_3 &= H_{33}R \\ X_4 &= H_{14}F + H_{24}(-R) \\ R &= k(X_2 - X_3) \end{aligned} \quad (1.241)$$

と表されます。以上の連立方程式を $X_4$ について解きます。  
始めにはばねの反力Rを求めます。

$$\begin{aligned} R &= k(H_{12}F - H_{22}R - H_{33}R) \\ (1 + kH_{33} + kH_{22})R &= kH_{12}F \\ R &= \frac{kH_{12}F}{1 + kH_{33} + kH_{22}} \\ &= \frac{H_{12}F}{H_{22} + H_{33} + \frac{1}{k}} \end{aligned} \quad (1.242)$$

ばねの反力Rから、 $X_4$ は次のように求まります。

$$\begin{aligned} X_4 &= H_{14}F - H_{24}R \\ &= H_{14}F - H_{24} \frac{H_{12}F}{H_{22} + H_{33} + \frac{1}{k}} \end{aligned} \quad (1.243)$$

$$\frac{X_4}{F} = H_{14} - \frac{H_{12}H_{24}}{H_{22} + H_{33} + \frac{1}{k}}$$

ここで、話を簡単にするために、ダイナミックダンパ  
ーを1につける場合を考えます。単に上式の添え字2を  
1に置き換えて

$$\frac{X_4}{F} = H_{14} - \frac{H_{11}H_{14}}{H_{11} + H_{33} + \frac{1}{k}} \quad (1.244)$$

と表すことができます。さらに、 $H_{33} + 1/k$ が $H_{14}$ に与え  
る影響を考えるために上式を次のように変形します。

$$\frac{X_4}{F} = H_{14} - \frac{H_{11}H_{14}}{H_{11} + H_{33} + \frac{1}{k}} \quad (1.245)$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{H_{33} + \frac{1}{k}}{H_{11}}} \right) H_{14}$$

上式より、元の $H_{14}$ に比べ、大括弧の値が1より小さくなる分がダイナミックダンパー効果とすることができます。例えば、 $H_{11} = \infty$ のとき、上式は0となるため、 $H_{11}$ が大きい（よく動く）場所にダイナミックダンパーを設置することが重要であることがわかります。

また、一例として

$$H_{33} + \frac{1}{k} = H_{11} \quad (1.246)$$

の関係が成り立つ場合、上式を式(1.245)に代入すれば

$$\frac{X_4}{F} = \left( 1 - \frac{1}{1+1} \right) H_{14} = 0.5H_{14} \quad (1.247)$$

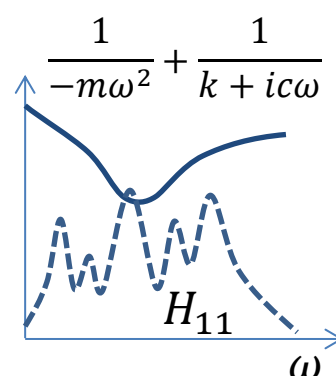
となり、 $H_{14}$ を半分にする効果を持ちます。

ところで、宙に浮いた質点3の $H_{33}$ とは何でしょうか？  
 $H_{33}$ は変位の伝達関数なので単位力当たりの変位です。  
 $F = ma$ の関係より加速度の伝達関数は $1/m$ です。従って、  
 $H_{33} = 1/(-m\omega^2)$ となります（浮いている質点を非周期的な力 $\omega = 0$ で押した場合、質点の変位は $\infty$ です）。

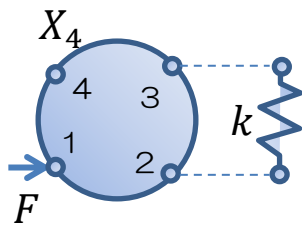
また、減衰 $c$ を含めて考える場合、結合要素 $k$ は複素ばね $k + ic\omega$ に置き換えられます。以上より、式(1.246)は

$$\frac{1}{-m\omega^2} + \frac{1}{k + ic\omega} = H_{11} \quad (1.248)$$

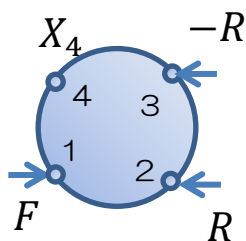
と表されるため、上式は図(欄外)のような関係となり、 $H_{11}$ と $H_{33} + 1/k$ が重なるほど、ダイナミックダンパーの効果が大きくなることを示しています。



2と3を  
ばねでくっつける



ばねの反力R  
を考慮する



### 1.6.3.ばね追加の考察

出来上がった車に振動騒音の課題があったとき、防振ゴムのばね定数を変えて検討を行いたい場合があります。伝達関数合成法を使えば、実際に車の防振ゴムを取り換えることなく効果を予測できます。

図(欄外)の1から4への伝達関数 $H_{14}$ を小さくするために、2と3の間にばねを追加することを考えます。前項と同様に、ばねを追加した後の変位は、実車状態で測定した伝達関数と追加するばねの反力 $R$ を用いて

$$\begin{aligned} X_1 &= H_{11}F + H_{21}R + H_{31}(-R) \\ X_2 &= H_{12}F + H_{22}R + H_{32}(-R) \\ X_3 &= H_{13}F + H_{23}R + H_{33}(-R) \\ X_4 &= H_{14}F + H_{24}R + H_{34}(-R) \\ R &= k(X_3 - X_2) \end{aligned} \quad (1.249)$$

と表されます。以上の連立方程式を $X_4$ について解きます。始めにばねの反力 $R$ を求めます。

$$\begin{aligned} R &= k\{H_{13}F + H_{23}R - H_{33}R - (H_{12}F + H_{22}R - H_{32}R)\} \\ &= k\{(H_{23} - H_{33} - H_{22} + H_{32})R + k(H_{13} - H_{12})F\} \\ R\{1 - k(H_{23} - H_{33} - H_{22} + H_{32})\} &= k(H_{13} - H_{12})F \\ R &= \frac{k(H_{13} - H_{12})F}{1 - k(H_{23} - H_{33} - H_{22} + H_{32})} \end{aligned} \quad (1.250)$$

従って $X_4$ 、および伝達関数は

$$\begin{aligned} X_4 &= H_{14}F + (H_{24} - H_{34})R \\ &= \left\{ H_{14} + \frac{(H_{24} - H_{34})k(H_{13} - H_{12})}{1 - k(H_{23} - H_{33} - H_{22} + H_{32})} \right\} F \\ \frac{X_4}{F} &= H_{14} + \frac{k(H_{24} - H_{34})(H_{13} - H_{12})}{1 - k(H_{23} - H_{33} - H_{22} + H_{32})} \end{aligned} \quad (1.251)$$

と求まります。追加するばねが複数ある場合は、それぞれの文字が行列であるとして、行列の計算を行います。



ニールス・ボーア

専門家とは、ごく限られた分野で、ありとあらゆる間違いをすべて経験した人物である。

## 自動車物理ノート、お薦めコンテンツ

### 簡単な力学モデルの計算

- ・ 運動方程式をミスなく組む 1.4
- ・ 周波数軸で運動方程式を解く 1.4
- ・ 時間軸で運動方程式を解く 2.1

### 減衰比（ゼータ） $\zeta$ の意味 1.2.9

### 強度からみた断面の決め方

- ・ 強度の判定方法 3.6
- ・ 簡易的な断面形状の見積もり手順 Appendix

### 衝突の考え方

- ・ 変形量と変形荷重 4.1
- ・ 拘束装置を活かす車の変形荷重 4.2



## 1.7. モード解析

エンジンや路面の力に対して、振動しづらい車を作るためには、入力点から人までの伝達関数を下げることが重要です。

伝達関数を下げる一般的な方法としては、柔らかいばねで支持する防振や、ダイナミックダンパーの設定などが考えられます。一方、別の方法として、力の発生源となるエンジンやサスペンションなどを構造物の振動モード（以下、固有モード）の節で支持する方法があります。

この節では、「モードの節で支える」ことで伝達関数が下がる理由を、モード解析の考え方で確認します。

### 1.7.1. 固有値と固有ベクトル

モード解析は、数学の行列計算で習う、固有値、固有ベクトルに基づいています。

$$Ax = \lambda x \quad (1.252)$$

上式は、例えば、ある2次元ベクトル $x$ に対して $2 \times 2$ の行列 $A$ を掛けると、元のベクトル $x$ の向きは変わらず、大きさだけが $\lambda$ 倍になる図(欄外)のような関係を示しています。このようなベクトル $x$ を、行列 $A$ の固有ベクトル、 $\lambda$ を固有値と呼びます。

上の説明では、「まずベクトル $x$ があって、ベクトル $x$ に対して特別な座標変換行列 $A$ が存在する」というように表現しましたが、工学的に重要なことは、「運動方程式を表す行列 $A$ に対して、特別な固有ベクトル $x$ と固有値 $\lambda$ を求める」ことです。

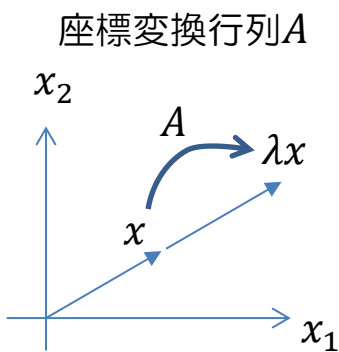
それでは、運動方程式 $A$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $x$ の計算を行ってみましょう。式(1.252)を変形し

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ (A - \lambda I)x &= 0 \end{aligned} \quad (1.253)$$

と表します。上式の $I$ は単位ベクトルです。さらに、上式の $A - \lambda I$ を行列 $B$ と置き換え

$$Bx = 0 \quad (1.254)$$

と表します。



さて、ここで興味があるのは、0でない固有ベクトル $x$ を求めることです。 $x \neq 0$ ならば $Bx = 0$ ということになります。従って、「 $Bx = 0$ の条件を求める」というと、そうではありません。ここでは、少し特殊な数学のテクニック、背理法を使って固有ベクトル $x$ を求めます。

始めに、行列 $B$ に逆行列 $B^{-1}$ が存在すると仮定します。式(1.254)に逆行列を左から掛けると

$$\begin{aligned} B^{-1}Bx &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{1.255}$$

となってしまう、 $x \neq 0$ と矛盾します。従って、 $x \neq 0$ の答えが存在するためには、少なくとも行列 $B$ の逆行列が存在しないことが必須条件であることがわかります。

それでは、行列 $B$ の逆行列が存在しない、とはどういう条件でしょうか？ ここでは簡単に、 $2 \times 2$ の行列で説明します。

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.256}$$

$$\det|B| = ad - bc$$

とします。このとき行列 $B$ の逆行列は

$$B^{-1} = \frac{1}{\det|B|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1.257}$$

です。上式より逆行列 $B^{-1}$ を得るためには $\det|B| \neq 0$ である必要があります。従って、行列 $B$ の逆行列が存在しない条件は

$$\det|B| = 0 \tag{1.258}$$

となります。

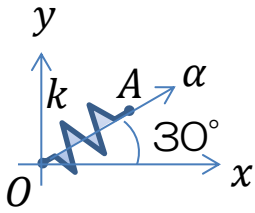
以上より、0でない固有ベクトル $x$ を求める条件式は、上式に $B = A - \lambda I$ を代入し

$$\det|A - \lambda I| = 0 \tag{1.259}$$

となります。上式から求めた固有値 $\lambda$ を式(1.252)に代入すれば、固有ベクトル $x$ を計算できます。以上、任意の行列 $A$ の固有値 $\lambda$ と、固有ベクトル $x$ の計算を固有値解析と呼びます。



### 1.7.2.剛性マトリクスの固有値解析



固有値解析で求まる固有値、固有ベクトルがどのような意味を持つのか？ 図（欄外）のように斜め 30 度方向（以下、 $\alpha$  方向）に配置されたばねの剛性マトリクスを例に考えます。

始めに図(欄外)の  $O$  点を固定し、 $A$  点を  $x$  方向に 1 動かした時の反力を考えます。 $\alpha$  方向に  $\cos 30$  動くため、ばね反力は  $k \cos 30$  になります。このばね反力を  $x$  方向と  $y$  方向に分けると、 $R_x = k \cos 30 \cos 30$ 、 $R_y = k \cos 30 \sin 30$  になります。一方、 $A$  点を  $y$  方向に 1 動かした場合、 $\alpha$  方向の変位は  $\sin 30$ 、ばね反力は  $k \sin 30$  になります。このばね反力を  $x$  方向と  $y$  方向に分けると、 $R_x = k \sin 30 \cos 30$ 、 $R_y = k \sin 30 \sin 30$  になります。以上まとめると

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos^2 30 & \cos 30 \sin 30 \\ \cos 30 \sin 30 & \sin^2 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (1.260)$$

となるため、 $k = 4$  の場合の剛性マトリクス  $K$  は上式より

$$K = 4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.261)$$

となります。この剛性マトリクス  $K$  の固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $x$  を求めるため、上式を式(1.252)に代入します。

$$\begin{aligned} K \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ \left( \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} - \lambda I \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= 0 \quad (1.262) \\ \begin{bmatrix} 3 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

ここで  $x_1 \neq 0$ 、 $x_2 \neq 0$  の解を持つ条件は

$$\det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.263)$$

です。上式を固有値  $\lambda$  について解くと

$$\begin{aligned} (3 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ (\lambda - 4)\lambda &= 0 \\ \therefore \lambda &= 0, 4 \end{aligned} \quad (1.264)$$

と求められます。

次に、固有ベクトル $x$ を計算します。剛性マトリクス $A$ 、固有値 $\lambda = 0, 4$ は既知であるため、式(1.262)の3行目の式から固有ベクトル $x$ を計算することができます。 $\lambda = 4$ を式(1.262)に代入し

$$\begin{bmatrix} 3-4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.265)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

となります。上式を連立方程式の形で書き出せば、2つの式

$$\begin{cases} -x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad (1.266)$$

が得られます。ここで、上式の1行目に $-\sqrt{3}$ を掛けると、2行目の式に一致するため上式は1つの式です。従って2つの未知数 $x_1, x_2$ を求めることはできませんが、 $x_1$ と $x_2$ の比を求めることはできます。一例として上式に $x_1 = 1$ を代入すれば

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1.267)$$

という比を得ます。このように、ベクトルの向きは決まるが大きさは決まらない、これが固有ベクトルの特徴です。

さて、固有値 $\lambda = 4$ 、固有ベクトル $(1, 1/\sqrt{3})$ は何を意味するでしょうか？ この項の最初の問題設定を思い出して下さい。斜め30度の方向にばね定数 $k = 4$ のばねを配置した剛性マトリクスの固有値と固有ベクトルを求める問題でした。角度30度の方向は、原点からのベクトルで表すと $(1, 1/\sqrt{3})$ 方向です。

このように、剛性マトリクスの固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $x$ は、ばね定数とばねの向きを表します。複数のばねが存在する場合、固有値解析によって複数のばねを1つに集約したばね定数と方向が求められるため、エンジンやサスペンションがどう動くかを考えやすくなります。

### 1.7.3. 運動方程式の固有値解析

前節では剛性マトリクスの固有値解析を行いました。では、運動方程式全体に適用するとどうなるでしょうか。

一般に外力が働かない減衰のない系の自由振動の運動方程式は、質量マトリクス $M$ 、剛性マトリクス $K$ を用いて

$$M\{\ddot{x}\} + K\{x\} = 0 \quad (1.268)$$

と表されます。未定係数法より $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$ と置いて上式を整理すれば

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M + K)\{X\}e^{i\omega t} &= 0 \\ (-\omega^2 M + K)\{X\} &= 0 \\ \omega^2 M\{X\} &= K\{X\} \\ K^{-1}M\{X\} &= \frac{1}{\omega^2}\{X\} \end{aligned} \quad (1.269)$$

となります。ここで上式を $K^{-1}M = A$ 、 $\lambda = 1/\omega^2$ 、 $\{X\} = x$ と置き換えれば

$$Ax = \lambda x \quad (1.270)$$

となり、式(1.252)と同じ形になります。従って、固有値 $\lambda$ を求める条件式は、先の固有値 $\lambda$ を求める条件式(1.259)に $A = K^{-1}M$ を代入し

$$\det|K^{-1}M - \lambda I| = 0 \quad (1.271)$$

となります。上式から求めた固有値 $\lambda$ を式(1.269)のいずれかに代入すれば、固有ベクトル $\{X\}$ を求めることができます。

式(1.269)で定義したように、固有値 $\lambda$ は $\lambda = 1/\omega^2$ であり、共振周波数 $\omega$ と関係の深い値であることから、共振周波数 $\omega$ のことを固有値と呼ぶことがあります。物理ノートでも、以降 $\omega$ も固有値と呼びます。また、固有ベクトル $\{X\}$ を3次元空間の座標値と区別する為に $\{X\} \rightarrow \{\phi\}$ と置き換え、式(1.269)の3行目を

$$\omega^2 M\{\phi\} = K\{\phi\} \quad (1.272)$$

と表します。

### 1.7.4.モード解析における運動方程式の変位

一般に、運動方程式は質量マトリクス $M$ 、減衰マトリクス $C$ 、剛性マトリクス $K$ を用いて

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (1.273)$$

と表されます。未定係数法より $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$ と置いて上式を整理すれば、振動振幅 $\{X\}$ は次のように求められます。

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M + i\omega C + K)\{X\}e^{i\omega t} &= \{F\}e^{i\omega t} \\ (-\omega^2 M + i\omega C + K)\{X\} &= \{F\} \\ \{X\} &= (-\omega^2 M + i\omega C + K)^{-1}\{F\} \end{aligned} \quad (1.274)$$

ここで、モード解析の考え方を導入します。モード解析では、上式の振動振幅 $\{X\}$ が $n$ 個の固有値における固有モードの重ね合わせで表せると考えます。 $r$ 番目の固有値を $\omega_r$ 、固有モードを $\{\phi_r\}$ 、その大きさを $\xi_r$ (グザイ)とすれば

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \xi_r \{\phi_r\} \quad (1.275)$$

です。上式の詳細を書き出すと

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1i} \\ \vdots \\ \phi_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_r \begin{pmatrix} \phi_{r1} \\ \vdots \\ \phi_{ri} \\ \vdots \\ \phi_{rn} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_n \begin{pmatrix} \phi_{n1} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.276)$$

です。ここで、上式の $r$ 番目の固有モード $\{\phi_r\}$ の点 $i$ の値 $\phi_{ri}$ は、式(1.270)、(1.271)から求まる値ですが、各モードの大きさ $\xi_r$ は外力 $\{F\}$ が与えられて始めて決まる値です。

それでは、式(1.274)から $\xi_r$ を求めていきます。式(1.274)の2行目に式(1.275)の添え字を $r \rightarrow l$ に変えて代入し

$$\sum_{l=1}^n \xi_l (-\omega^2 M\{\phi_l\} + i\omega C\{\phi_l\} + K\{\phi_l\}) = \{F\} \quad (1.277)$$

となります。さらに上式に左から $r$ 番目の固有モード $\{\phi_r\}^T$ を乗じれば

$$\sum_{l=1}^n \xi_l (-\omega^2 \{\phi_r\}^T M\{\phi_l\} + i\omega \{\phi_r\}^T C\{\phi_l\} + \{\phi_r\}^T K\{\phi_l\}) = \{\phi_r\}^T \{F\} \quad (1.278)$$

です。非常に複雑な式になってしまいましたが、最終的に上式はシンプルな形に整理され、 $\xi_r$ が求まります。

さて、ここで式(1.278)をシンプルに表すための、固有モードの直交性について整理します。前節で考えたように固有値 $\omega$ と固有モード $\phi$ は、式(1.271)と式(1.272)

$$\det|K^{-1}M - I/\omega^2| = 0 \quad (1.279)$$

$$\omega^2 M\{\phi\} = K\{\phi\} \quad (1.280)$$

から求められる値です。従って、 $i$ 番目の固有値 $\omega_i$ と固有モード $\phi_i$ は

$$\omega_i^2 M\{\phi_i\} = K\{\phi_i\} \quad (1.281)$$

の関係があります。ここで上式に、左から $j$ 番目の固有モード $\{\phi_j\}^T$ を乗じれば

$$\omega_i^2 \{\phi_j\}^T M\{\phi_i\} = \{\phi_j\}^T K\{\phi_i\} \quad (1.282)$$

となります。

同様に、 $j$ 番目の固有値 $\omega_j$ と固有モード $\phi_j$ は

$$\omega_j^2 M\{\phi_j\} = K\{\phi_j\} \quad (1.283)$$

の関係があります。ここで上式のマトリクス $M$ 、 $K$ と $\{\phi_j\}$ の順番を入れ替えます。 $M$ も $K$ も対称行列であるため

$$\omega_j^2 \{\phi_j\}^T M = \{\phi_j\}^T K \quad (1.284)$$

と置き換えることができます。さらに、上式に右から $\{\phi_i\}$ を掛ければ

$$\omega_j^2 \{\phi_j\}^T M\{\phi_i\} = \{\phi_j\}^T K\{\phi_i\} \quad (1.285)$$

となります。ここで、式(1.282)と式(1.285)の右辺が等しいため

$$\omega_i^2 \{\phi_j\}^T M\{\phi_i\} = \omega_j^2 \{\phi_j\}^T M\{\phi_i\} \quad (1.286)$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\phi_j\}^T M\{\phi_i\} = 0$$

の関係式が得られます。重根の場合を除けば $\omega_i \neq \omega_j$ であるため、上式が成り立つには

$$\{\phi_j\}^T M\{\phi_i\} = 0 \quad (1.287)$$

という条件が必要です。また、上式を式(1.285)に代入し

$$\{\phi_j\}^T K\{\phi_i\} = 0 \quad (1.288)$$

の条件も得られます。

さらに、減衰 $C$ を比例定数 $a$ 、 $b$ を用いて

$$C = aM + bK \quad (1.289)$$

と表される構造減衰の場合に限定すれば、同様に

$$\{\phi_j\}^T C \{\phi_i\} = 0 \quad (1.290)$$

となります。

以上、固有モードの直交性をまとめると、 $i \neq j$ のとき

$$\begin{aligned} \{\phi_j\}^T M \{\phi_i\} &= 0 \\ \{\phi_j\}^T K \{\phi_i\} &= 0 \\ \{\phi_j\}^T C \{\phi_i\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.291)$$

また、 $i = j$ では0以外の値、すなわち定数となるため、 $i = j = r$ として、次式のように置きます。

$$\begin{aligned} \{\phi_r\}^T M \{\phi_r\} &= m_r \\ \{\phi_r\}^T K \{\phi_r\} &= k_r \\ \{\phi_r\}^T C \{\phi_r\} &= c_r \end{aligned} \quad (1.292)$$

(専門書によると、重根の場合でも、式(1.291)、(1.292)が成り立つと考えて固有モードを求めるようですが、その根拠はまだ理解できていません。)

式(1.278)を簡略化する準備が整いました。式(1.291)の関係より、式(1.278)の $\Sigma$ は $l = r$ のときのみ値を持つため

$$\xi_r(-\omega^2 \{\phi_r\}^T M \{\phi_r\} + i\omega \{\phi_r\}^T C \{\phi_r\} + \{\phi_r\}^T K \{\phi_r\}) = \{\phi_r\}^T \{F\} \quad (1.293)$$

と簡略化されます。各モードの大きさ $\xi_r$ は、上式に式(1.292)を代入し、

$$\begin{aligned} \xi_r(-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r) &= \{\phi_r\}^T \{F\} \\ \xi_r &= \frac{\{\phi_r\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \end{aligned} \quad (1.294)$$

と求まります。最後に上式を式(1.275)に代入すれば

$$\begin{aligned} \{X\} &= \sum_{r=1}^n \xi_r \{\phi_r\} \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{\{\phi_r\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \{\phi_r\} \end{aligned} \quad (1.295)$$

となり、運動方程式の変位 $\{X\}$ を固有モードで表した一般式が得られます。

### 1.7.5.モード解析における伝達関数

式(1.295)から伝達関数を考えます。変位の伝達関数は、入力点*i*に周期的な単位荷重を加えた時の応答点*j*の変位です。点*i*から点*j*への伝達関数の計算では、力の行列{*F*}は点*i*以外は0となる、次のような行列です。

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.296)$$

上式を式(1.295)の分子に代入すると

$$\{\phi_r\}^T \{F\} = \{\phi_{r1} \cdots \phi_{ri} \cdots \phi_{rn}\} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \phi_{ri} F_i \quad (1.297)$$

です。上式を式(1.295)に代入し

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{ri} F_i}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \{\phi_r\} \quad (1.298)$$

となります。ここで、上式の応答点*j*にだけ着目すれば

$$X_j = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{ri} F_i}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \phi_{rj} \quad (1.299)$$

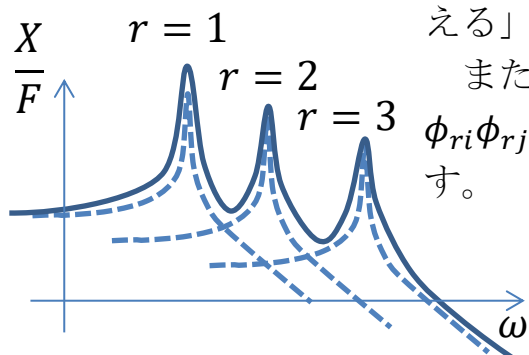
です。以上より、点*i*から点*j*への伝達関数*H<sub>ij</sub>*は

$$H_{ij} = \frac{X_j}{F_i} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{ri} \phi_{rj}}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \quad (1.300)$$

と表されます。

上式の分子に着目すると、伝達関数は入力点*i*の固有モード $\phi_{ri}$ と応答点*j*の固有モード $\phi_{rj}$ の掛け算です。従って、入力点*i*をモードの節に近づければ、伝達関数を小さくすることができます。上式が、構造物を「モードの節で支える」メリットを説明する物理式になります。

また、上式の添え字*i*と*j*を入れ替えても、右辺の分子 $\phi_{ri} \phi_{rj}$ はスカラーの掛け算であるため、 $H_{ij} = H_{ji}$ となります。



### 1.7.6.運動方程式から固有モードを求める

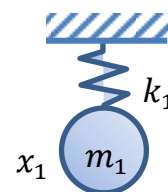
1 自由度のばねマスの運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.301)$$

の答えを  $x = X \sin \omega t$  と仮定し上式に代入すれば

$$(-m\omega^2 + k)X = 0 \quad (1.302)$$

となるため、 $X = 0$ 、あるいは  $\omega = \sqrt{k/m}$  で上式は成立します。従って  $\omega = \sqrt{k/m}$  ならば、 $X$  はどのような大きさでも上式を満たします。このように、振幅の大きさ  $X$  によらず、常に運動方程式を満たす特別な  $\omega$  を固有値と呼びます。



次に図（欄外）のような2自由度のばねマスを考えます。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.303)$$

同様に  $x_1 = X_1 \sin \omega t$ 、 $x_2 = X_2 \sin \omega t$  を仮定し上式に代入すれば

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.304)$$

となります。上式に対して1自由度で考えたような、ある特別な  $\omega$  で、自由に動ける  $X_1$ 、 $X_2$  は何でしょうか？ 同様に  $X_1 \neq 0$  の条件を考えてみます。上式1行目より

$$X_2 = -\frac{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}{k_2} X_1 \quad (1.305)$$

上式を式(1.304)の2行目に代入すれば

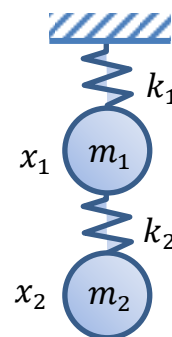
$$\begin{aligned} -k_2 X_1 + (-m_2\omega^2 + k_2) X_2 &= 0 \\ -k_2 X_1 - \frac{(-m_2\omega^2 + k_2)(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)}{k_2} X_1 &= 0 \\ \frac{(-m_2\omega^2 + k_2)(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) - k_2^2}{k_2} X_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.306)$$

です。ここで上式が、 $X_1 \neq 0$  で成り立つには

$$(-m_2\omega^2 + k_2)(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) - k_2^2 = 0 \quad (1.307)$$

となる必要があります。上式はいわゆる、式(1.304)の行列式=0の式であり、固有値  $\omega$  を求める条件式です。

このとき1自由度と同様に、固有値  $\omega$  では、振幅  $X_1$  の大きさによらず、常に運動方程式を満たす特別な運動  $X_1$ 、 $X_2$  があります。既に式(1.305)に示されたように、 $X_2$  は  $X_1$  の比で表され、この特別な動き方の比を固有モード（固有





ベクトル) と呼びます。この比を求めるために、例えば  $X_1 = 1$  (定数) を式(1.305)に代入し

$$X_2 = -\frac{-m_1\omega^2 + k_1 + k_2}{k_2} \cdot 1 \quad (1.308)$$

と求めます。

ここで  $X_1$  に代入する定数は1でも100でも構いません。もし固有モードを大きく求めてしまうと、式(1.300)の伝達関数  $H_{ij}$  の分子が大きくなるようにみえます。しかし、分母の  $m_r$ 、 $c_r$ 、 $k_r$  も式(1.292)のように、固有モードの積で計算されます。従って、固有モードの大きさに関わらず、伝達関数  $H_{ij}$  は一定の値になります。

### 1.7.7. 運動方程式の逆問題 固有モードの設定

結果的に、式(1.308)の固有モードは、運動方程式(1.240)に  $X_1 = 1$  を代入し

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.309)$$

未知数  $\omega$  と  $X_2$  を求めたこととなります。この手順は、2つの数式から2つの未知数を求める、数学の基本的な操作です。従って、2つの数式に対して、任意の2つの未知数を選ぶことができます。

例えば、図(欄外)の1自由度の質点の質量が  $m_1$  とばね定数  $k_1$  は既知とします。これに、質点  $m_2$  をぶら下げる場合に、固有値  $\omega = 1$ 、固有モード  $X_2 = 2$  とするためには、どんな  $m_2$  と  $k_2$  にすればよいでしょうか？ この条件を式(1.309)に代入すれば

$$\begin{bmatrix} -m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.310)$$

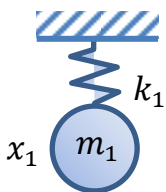
です。上式1行目より

$$\therefore k_2 = -m_1 + k_1 \quad (1.311)$$

また、2行目より

$$\therefore m_2 = \frac{k_2}{2} \quad (1.312)$$

となります。このように非常に単純な方法で、狙いの固有値、固有モードにするための、設計諸元間の条件を見出すことができます。



## 参考図書

### C.R.ワイリー 「工業数学 上」

フーリエ変換と、フーリエ変換からラプラス変換への導出が理解できました。分厚いのが難点ですが、初学者に対して、非常に真摯な内容と思います。

### 楠田信 「使える数学フーリエ・ラプラス変換」

初歩的な問題が豊富な例題集。グラフが見やすい。ただし、式の導出は「工業数学 上」をお勧めします。

### 安田仁 「振動工学 応用編」

自励振動についてわかりやすく解説。また、パラメータ振動、回転体の振動、非線形振動、振動のアクティブ制御など、振動の専門家っぽい話題が満載。実戦で役立つ考え方がつまった入門書と思います。

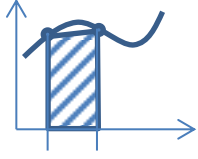
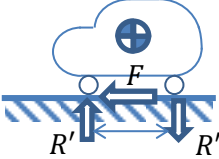


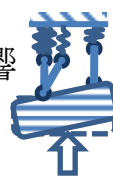

ガリレオ・ガリレイ

人間は他人に何事も教えることはできない。  
ただ、発見するのを手助けするだけだ。





## 2. 車両運動の式

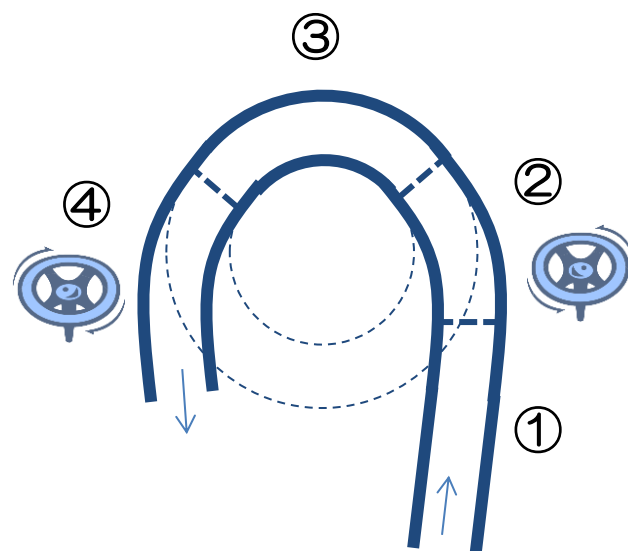
過渡応答計算 	走る 	まっすぐ進む 
曲がる ステア特性 	車両運動	曲がる 横力の影響 
曲がる 接地荷重変化 の影響 	止まる	乗り心地

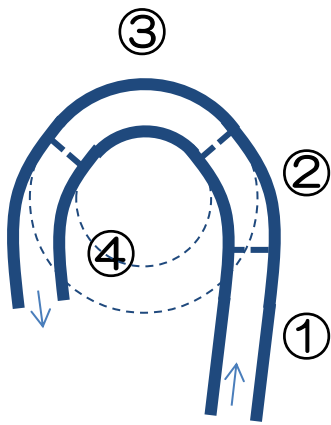
車の運動性能について、コーナーをうまく通り抜けるための「走る」「曲がる」「止まる」について簡単に整理したいと思います。

コーナーリングがうまくいったかどうかは、基準となる走り方を決め、その走り方がしやすいかどうかで判断することができます。1つの基準として、「コップの水をこぼさない運転」「眠っている人を起こさない運転」というのはどうでしょうか。車の前後Gと横Gを滑らかに繋ぐようなコーナーリングです。車の操作は、

- ① コーナー手前でブレーキ ON
- ② ブレーキを戻しながらステアリングを徐々に切る
- ③ ここだ！と思うところでステアリングをキープ
- ④ ステアリングを戻しながら、徐々にアクセル ON

一定のGがぐるっと一周するので、コップの水は、コップの淵を一周します。このGを滑らかに繋ぐコーナーリングは、ゆりかごに乗っているような安心感と心地よさがあります。また、コーナーを見通せる②の位置でブレーキに足がかかっているのを、安全なコーナーリングだと思います。





③の前後で減速と加速を滑らかに繋ぐためには、アクセルとブレーキのレスポンスが良く、ペダルのストロークに対して前後Gを滑らかに調節できる「操作しやすい車」であることがポイントです。

例えば、アクセルのレスポンスが悪い車は③のコーナーの途中で、事前にアクセルを踏まねばなりません。極端に悪い車では、②でブレーキに足がかかっているときにアクセルを踏む必要があるため、車を意のままに操ることができません。

適切と感じるレスポンスや操作量は、地域やユーザーなど、車の使われ方によって異なるため、唯一の答えはありません。例えば、日本人の多くはコーナーリング中の旋回半径の調整をステアリングの操作のみで行いがちですが、欧州ではアクセルのON/OFFによる車速変化も利用して微調整を行います。欧州式の操作法では、微妙なアクセルペダル操作で車の速度を調整できることも運転しやすい車の条件になります。

## 2.1. 過渡応答計算

始めに、車のいろいろな現象の確認や解析に役立つ、数値計算の方法について整理しておきます。

数値計算のメリットは、解析的に解くことが難しい複雑な運動方程式でも結果が計算できること、細かく厳密にモデル化すれば計算結果の精度を高められることです。デメリットは、結果に至るメカニズムを理解することが難しく、よい結果となる条件を得るにはパラメータスタディが必要であること。またパラメータスタディの外の結果は予測が難しいことです。

物理ノートでは、式で考えたことを確認する目的で数値計算を活用します。



### 2.1.1.陰解法 ニューマークの $\beta$ 法

実用的な数値計算方法であるニューマークの $\beta$ 法 (Newmark beta method) (平均加速度法とも呼ぶ) について考え方を整理します。線形の運動方程式ならば計算誤差による発散が起こらない優れた特徴があります。

一般に、力学モデルに外力 $f(t)$ を加えた運動方程式は、質量マトリクス $m$ 、減衰マトリクス $c$ 、剛性マトリクス $k$ を用いて次のように表されます。

$$ma(t) + cv(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.1)$$

ニューマークの $\beta$ 法では、「全ての時間 $t$ において、上式の左辺と右辺が等しい関係を保つ」という条件を考慮することで、計算誤差による発散を防いでいます。

それでは、現在時間 $t$ の変位 $x(t)$ 、速度 $v(t)$ 、加速度 $a(t)$ 、と全ての時間の外力 $f$ から、次の時間 $t + dt$ の変位 $x(t + dt)$ 、速度 $v(t + dt)$ 、加速度 $a(t + dt)$ を計算する方法を考えていきます。未知数は3つのため、3つの関係式が必要になります。

1つ目の関係式は、ニューマークの $\beta$ 法を特徴づける重要な式、次の時間 $t + dt$ における運動方程式です。

$$ma(t + dt) + cv(t + dt) + kx(t + dt) = f(t + dt) \quad (2.2)$$

次に、2つ目の関係式として、加速度と速度の関係に着目します。今、求めたい真の加速度の時間推移が図(欄外)のようであったとします。このとき、時間 $dt$ の間の速度の変化代は、加速度グラフの $dt$ の台形の面積

$$\frac{a(t) + a(t + dt)}{2} dt \quad (2.3)$$

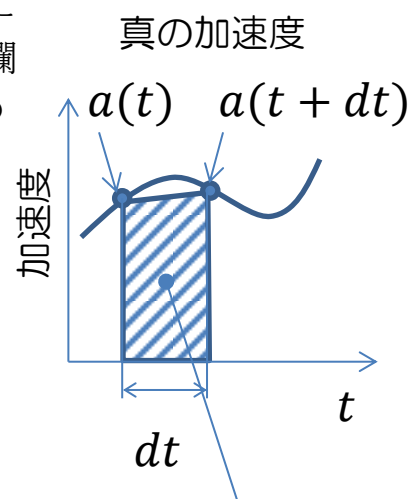
です。従って $v(t + dt)$ は

$$v(t + dt) = v(t) + \frac{a(t) + a(t + dt)}{2} dt \quad (2.4)$$

と表すことができます。

最後に3つ目の関係式として、速度と変位の関係に着目します。式(2.3)と同様に時間 $dt$ の間の変位の変化代は、速度グラフの $dt$ の台形の面積

$$\frac{v(t) + v(t + dt)}{2} dt \quad (2.5)$$



$dt$ 秒後の速度変化量

$$\frac{a(t) + a(t + dt)}{2}$$

です。従って $x(t + dt)$ は

$$x(t + dt) = x(t) + \frac{v(t) + v(t + dt)}{2} dt \quad (2.6)$$

となります。ここで、上式に式(2.4)を代入すれば

$$\begin{aligned} x(t + dt) &= x(t) + \frac{v(t) + v(t) + \frac{a(t) + a(t + dt)}{2} dt}{2} dt \\ &= x(t) + v(t)dt + \frac{a(t) + a(t + dt)}{4} dt^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となります。

以上、3つの未知数、 $x(t + dt)$ 、 $v(t + dt)$ 、 $a(t + dt)$ に対し、3つの関係式(2.2)、(2.4)、(2.7)があるため、未知数を求めることができます。まず、加速度 $a(t + dt) = A$ において $A$ を求めます。式(2.4)、(2.7)を式(2.2)に代入し

$$mA + c \left\{ v(t) + \frac{a(t) + A}{2} dt \right\} + k \left\{ x(t) + v(t)dt + \frac{a(t) + A}{4} dt^2 \right\} = f(t + dt) \quad (2.8)$$

となります。上式を $A$ について解けば

$$A = \frac{f(t + dt) - c \left\{ v(t) + \frac{a(t)}{2} dt \right\} - k \left\{ x(t) + v(t)dt + \frac{a(t)}{4} dt^2 \right\}}{m + \frac{dt}{2}c + \frac{dt^2}{4}k} \quad (2.9)$$

と求めることができます。また、速度と変位は上式の加速度 $A$ を用いて

$$v(t + dt) = v(t) + \frac{a(t) + A}{2} dt \quad (2.10)$$

$$x(t + dt) = x(t) + v(t)dt + \frac{a(t) + A}{4} dt^2$$

と求めることができます。このように式(2.9)、(2.10)の計算を $dt$ ステップごとに行えば、変位、速度、加速度の時間推移を計算することができます。また、多自由度の運動方程式では $m$ 、 $c$ 、 $k$ は行列となるため、式(2.9)の分母を逆行列に置き換えて計算を行います。

上記の式(2.2)のように、次の時間 $t + dt$ の運動方程式の力のつり合いを考慮した数値計算法は陰解法(imexplicit method)と呼ばれます。

### 2.1.2.陽解法 オイラー法

先の陰解法に比べて、次の時間 $t + dt$ の運動方程式のつり合いを考慮しない数値計算法を陽解法(**explicit method**)と呼びます。ここでは、陽解法の中で最も初歩的な数値計算法であるオイラー法(**Euler's method**)について整理します。

ある時間 $t$ の運動方程式のつり合い

$$ma(t) + cv(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.11)$$

より、加速度を

$$a(t) = \frac{f(t) - cv(t) - kx(t)}{m} \quad (2.12)$$

と求めます。また、次の時間 $t + dt$ の速度と変位は単に

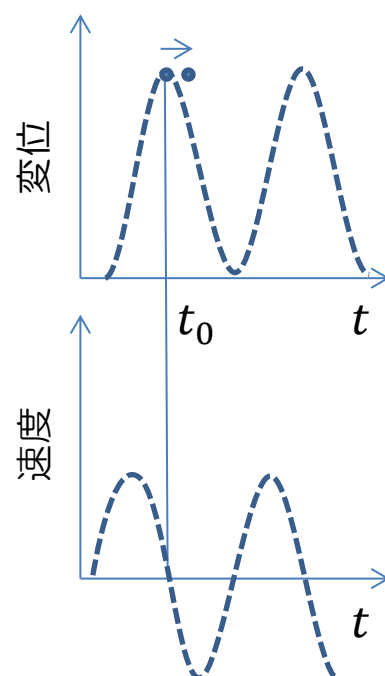
$$\begin{aligned} v(t + dt) &= v(t) + a(t)dt \\ x(t + dt) &= x(t) + v(t)dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

と求めます。ニューマーク  $\beta$  法に比べて計算時間が速い代わりに計算誤差が大きくなります。

計算誤差が生じる状況を、1自由度のばねマスの自由振動の変位、速度、加速度で説明します。図(欄外)の破線が真の答えであるとし、例えば時間 $t_0$ の計算では速度0であるため、次の時間 $t_0 + dt$ の変位は変化しません。すると、次の時間 $t_0 + dt$ の変位は真の答えからはみ出すこととなります。本来、変位が減る局面で変位が減らないため、時間の経過とともに自由振動の振動振幅は発散します。

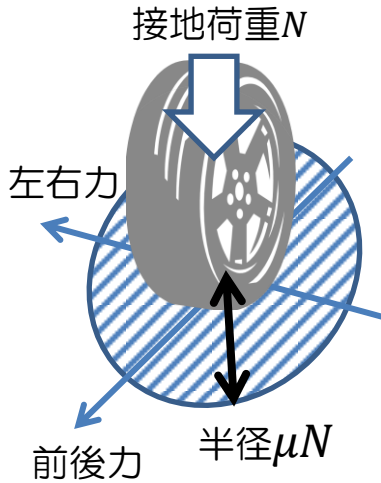
このように陽解法は計算結果が発散する要因を持つため時間ステップを小さくして発散を抑制する必要があります。ただし、計算の目的が、発散するかどうかを確認したい場合は、発散の要因が計算誤差にあるのか運動方程式にあるのか判断が難しいため、前項のニューマークの $\beta$ 法がお勧めです。

真の答えからはみ出す





## タイヤの摩擦円



## 2.2. 走る

車は路面の摩擦力を利用して「走る」、「曲がる」、「止まる」を行うため、路面で発生できる最大駆動力 $F_{max}$ は、摩擦係数 $\mu$ とタイヤの接地荷重を $N$ とすれば

$$F < \mu N \quad (2.14)$$

の関係にあります。従って、図（欄外）のような接地面のタイヤの前後力と左右力の合計のベクトルは、半径 $\mu N$ の円の内側に制限され、この円をタイヤの摩擦円と言います。

走行中の4輪の摩擦円は、路面や車の状況に応じて絶えず変化し、車の運動性能に影響を与えています。

### 2.2.1. タイヤの摩擦円と荷重移動

車が加速する時の摩擦円の変化を考えます。始めに、止まっている車の前後輪の摩擦円の半径 $\mu N_1'$ 、 $\mu N_2'$ を計算します。図（欄外）のように車の前輪から重心までの距離を $x$ 、前輪から後輪までの距離をホイールベース $L$ 、重力加速度を $g$ とすれば

$$\mu N_1' = \mu \frac{L - x}{L} mg \quad (2.15)$$

$$\mu N_2' = \mu \frac{x}{L} mg$$

と表すことができます。

次に車が駆動力 $F$ で加速しているときの摩擦円の変化を考えます。駆動力 $F$ は路面で発生しているため、車の重心には高さ $z$ に比例したモーメント $Fz$ が働きます。このモーメント $Fz$ は前後輪の上下方向の偶力 $R'$ とつり合います。

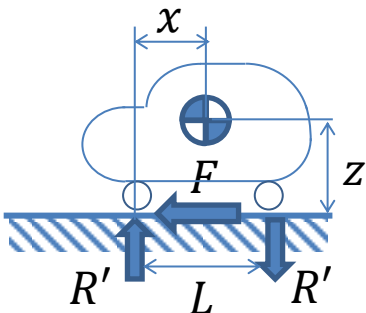
$$R' = \frac{Fz}{L} \quad (2.16)$$

このとき、偶力 $R'$ は前輪荷重を $R'$ 減らし、後輪荷重を $R'$ 増やすことから、これを前後輪の荷重移動と呼びます。

以上より、駆動力 $F$ で加速する車の前後輪の摩擦円の半径 $\mu N_1$ 、 $\mu N_2$ は

$$\mu N_1 = \mu(N_1' - R') = \mu \left( \frac{L - x}{L} mg - \frac{Fz}{L} \right) \quad (2.17)$$

駆動力 $F$ で加速中の車に働くモーメント



$$\mu N_2 = \mu(N'_2 + R') = \mu\left(\frac{x}{L}mg + \frac{Fz}{L}\right) \quad (2.18)$$

と表されます。上式より、重心が高くホイールベース $L$ が小さい車ほど荷重移動による摩擦円の変化が大きくなることがわかります。

### 2.2.2.重心位置と前輪駆動車の加速性能

車の重心位置 $(x, z)$ が、前輪駆動車の加速性能に与える影響を考えます。一般に、前輪駆動車の最大加速度 $a$ は、重心が前輪寄りの車ほど大きくなる傾向にあります。これは、最大駆動力 $F$ が加速中の前輪の摩擦円以下に制限されるためです。式(2.14)に式(2.17) (加速中の前輪の摩擦円の変化) を代入し

$$F < \mu\left(\frac{L-x}{L}mg - \frac{Fz}{L}\right) \quad (2.19)$$

となります。ここで、質量 $m$ の車を加速度 $a$ で加速するために必要な駆動力 $F$ は $F = ma$ であるため、上式に $F = ma$ を代入し

$$ma < \mu\left(\frac{L-x}{L}mg - \frac{maz}{L}\right) \quad (2.20)$$

と表します。上式の条件を満たす車の重心位置を、横軸 $x$ 、縦軸 $z$ の図面に示すために式を整理します。

$$ma \cdot \frac{L}{ma\mu} < \mu\left(\frac{L-x}{L}mg - \frac{maz}{L}\right) \cdot \frac{L}{ma\mu} \quad (2.21)$$

$$\frac{L}{\mu} < (L-x)\frac{g}{a} - z$$

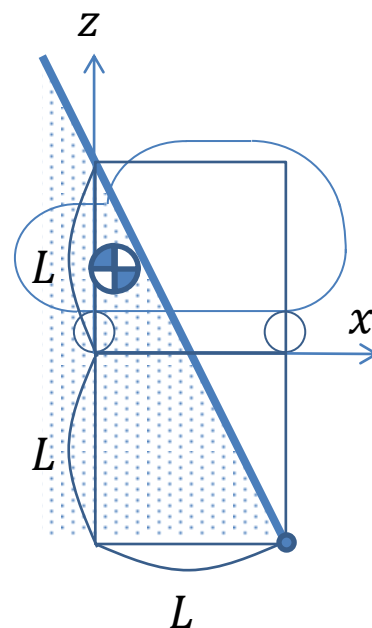
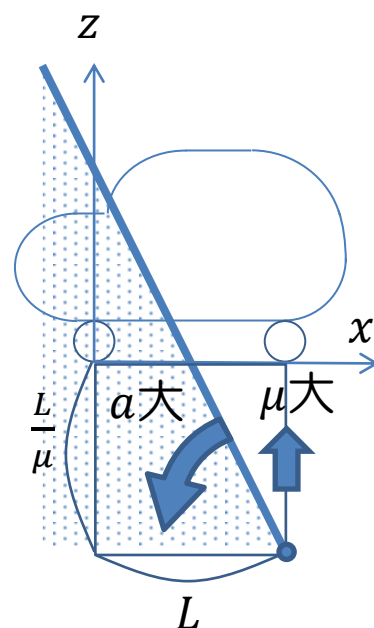
$$z < -\frac{g}{a}(x-L) - \frac{L}{\mu}$$

上式より、車の重心位置 $(x, z)$ が $(L, -L/\mu)$ を通る傾き $-g/a$ の直線より下側であれば、前輪がスピンせずに加速できます。

例えば、 $\mu = 1.0$ 、 $a = 4.9\text{m/s}^2 = 0.5g$ の場合

$$z < -2(x-L) - L \quad (2.22)$$

であるため、車に求められる重心位置は、図(欄外)の網掛けの範囲になります。



### 2.2.3. 重心位置と後輪駆動車の加速性能

車の重心位置 $(x, z)$ が、後輪駆動車の加速性能に与える影響を考えます。式(2.18)に表されるように、加速中は前後輪の荷重移動により、後輪の摩擦円が大きくなります。従って、後輪駆動車は、前輪駆動車よりも加速性能の上限が高くなる傾向にあります。駆動力 $F$ と重心位置 $(x, z)$ の関係式は、式(2.14)に式(2.18)を代入し

$$F < \mu \left( \frac{x}{L} mg + \frac{Fz}{L} \right) \quad (2.23)$$

となります。ここで、質量 $m$ の車を加速度 $a$ で加速する場合に必要な駆動力は $F = ma$ であるため、上式は

$$ma < \mu \left( \frac{x}{L} mg + \frac{maz}{L} \right) \quad (2.24)$$

と表されます。上式の条件を満たす車の重心位置を、横軸 $x$ 、縦軸 $z$ の図面に示すために式を整理します。

$$ma \cdot \frac{L}{ma\mu} < \mu \left( \frac{x}{L} mg + \frac{maz}{L} \right) \cdot \frac{L}{ma\mu} \quad (2.25)$$

$$z > -\frac{g}{a}x + \frac{L}{\mu}$$

上式より、車の重心位置 $(x, z)$ が $(0, L/\mu)$ を通る傾き $-g/a$ の直線より上側であれば、後輪がスピンせずに加速できます。

また一方で、前輪の接地荷重 $N_1 = 0$ は車が後転する危険性があるため

$$N_1 = \frac{L-x}{L} mg - \frac{Fz}{L} > 0 \quad (2.26)$$

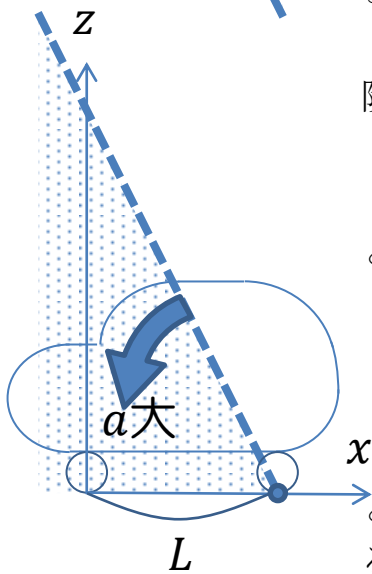
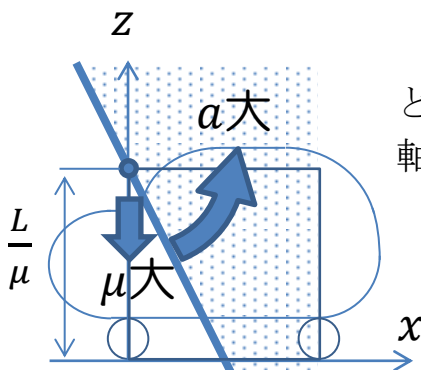
という条件も必要です。上式に $F = ma$ を代入し

$$\frac{L-x}{L} mg - \frac{maz}{L} > 0 \quad (2.27)$$

$$z < -\frac{g}{a}(x-L)$$

となります。上式を図面に示すと、車の重心が $(L, 0)$ を通る傾き $-g/a$ の直線より下側にならないと、前輪が浮いてしまうことがわかります。

例えば、 $\mu = 1.0$ 、 $a = 4.9/s^2 = 0.5g$ の場合



$$\text{摩擦力の条件(実線)} \quad z - L > -2x \quad (2.28)$$

$$\text{前輪浮の条件(破線)} \quad z < -2(x - L)$$

であるため、車に求められる重心位置は、図(欄外)の実線と破線の間になります。

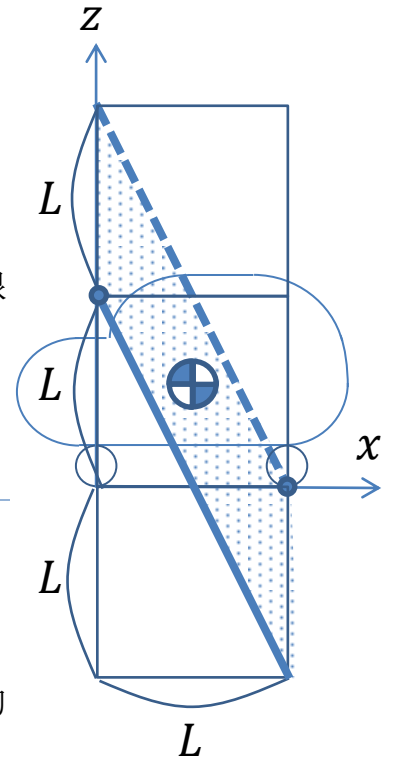
#### 2.2.4.前輪駆動と後輪駆動の加速性能の差

さて、ここまでの議論で、前輪駆動と後輪駆動、どちらが加速性能に優れた車と言えるのでしょうか？ 後輪駆動、と言いたいところですが、重心が前輪寄りの車の場合、低 $\mu$ 路限定で前輪駆動が勝る場合があるため、具体的な値を使って確認したいと思います。

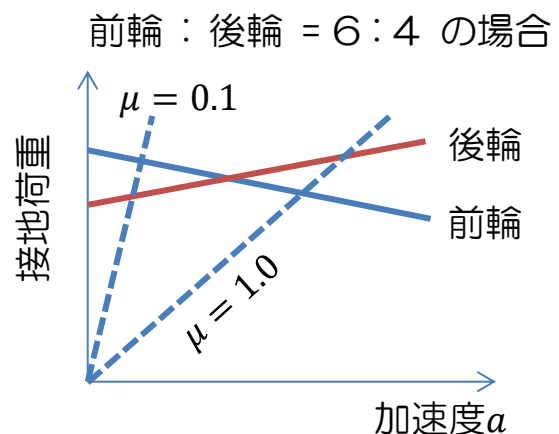
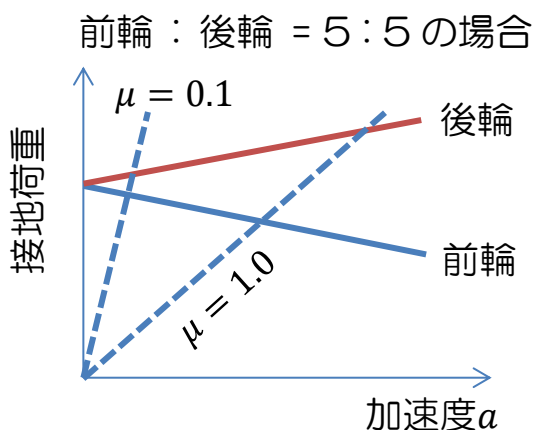
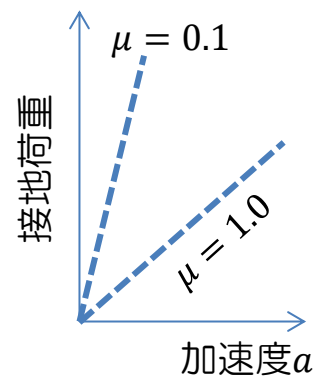
質量 $m$ の車が加速度 $a$ で加速するために必要な駆動輪の接地荷重 $N$ は、 $F = ma$ を式(2.14)に代入し

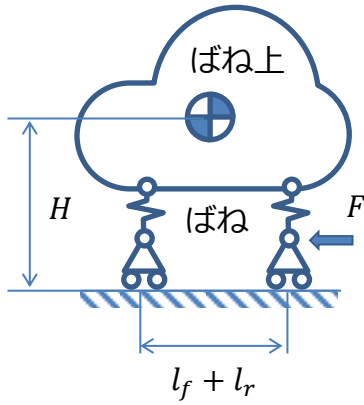
$$N > \frac{m}{\mu} a \quad (2.29)$$

です。ここで上式の $\mu = 0.1$ 、 $\mu = 1.0$ の場合に加速度 $a$ を得るために必要な接地荷重を図(欄外)の破線に示します。このグラフに加速度 $a$ におけるタイヤの接地荷重を重ねる(下図)と、その交点が、その路面 $\mu$ において発生できる最大の加速度を表します。例えば、前後輪の接地荷重の比が「前輪：後輪=5:5」の車の場合、路面 $\mu$ に関わらず、後輪駆動が高い加速度を得ることができます。一方、「前輪：後輪=6:4」の車の場合、低 $\mu$ 路においては前輪駆動が加速性能に優れていることがわかります。これは、低 $\mu$ 路では加速度 $a$ が小さく荷重移動が小さいため、駆動輪の初期の荷重が加速性能を左右する、と解釈できます。



路面 $\mu$ が小さいほど接地荷重が必要





### 2.2.5.加速時の車両姿勢 アンチスクオート

加速時の車両姿勢を、図(欄外)のモデルで考えます。ここでは、客室を支える柔らかいばねを「ばね」、客室を含むばねの上の質量を、単に「ばね上」と呼びます。加速時にばねに伝わる力が大きいほど、ばねが変形し、ばね上は後ろに傾きます。

それでは、加速時にばねに働く力を考えていきます。エンジントルクは、ばね上に支持されたドライブシャフトを介してタイヤに伝わります。ドライブシャフトトルク $T$ 、タイヤ半径 $r$ とすれば、接地面で発生する前後力 $F$ は

$$F = \frac{T}{r} \quad (2.30)$$

となります。

このとき、ばね上に働くモーメント $M$ を考えます。前後力 $F$ は、タイヤの回転軸に働きアームを介してばね上に伝わります。また、ドライブシャフトはばね上に支持されているため、ばね上はドライブシャフトトルク反力 $T$ も支えます。以上より、ばね上に働くモーメント $M$ は

$$\begin{aligned} M &= F(H - r) + T \\ &= F\left(H - \frac{T}{F}\right) + T \\ &= FH \end{aligned} \quad (2.31)$$

となります。上式より、ドライブシャフト位置やタイヤ半径 $r$ とは無関係に、常に $FH$ です。

以上より、 $R$   $r$  ばねを縮める力 $R$ はホイールベース $l_f + l_r$ で除して

$$R = \frac{FH}{l_f + l_r} \quad (2.32)$$

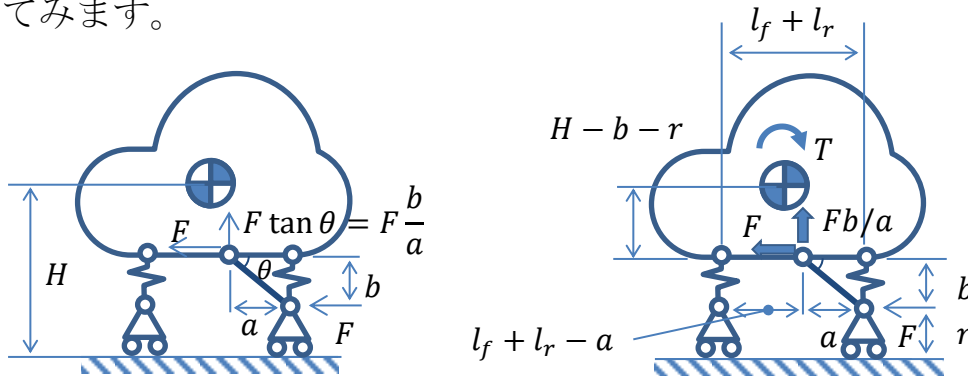
となります。

次に、前後力 $F$ をばね上に伝えるアームが、角度 $\theta$ の方向に伸びている場合の、 $R$   $r$  ばねを縮める力 $R'$ を考えます。

図（下左）のように、斜めアームによって上向きの力  $F \tan \theta = Fb/a$  が伝わる分、R r ばねを縮める力が減るだろうと考え、単に

$$R' = R - F \tan \theta = \frac{FH}{l_f + l_r} - F \tan \theta \quad (2.33)$$

と式を立てます。さて上式は正しいでしょうか？ 図（下右）のように、ばね上に働く力をすべて書き出し、確認してみます。



ばね上に働くモーメント  $M'$  は、ばね上のアーム支持位置の前後力  $F$  とドライブシャフト反力  $T$  の和

$$\begin{aligned} M' &= F(H - r - b) + T \\ &= F(H - r - b) + Fr \\ &= F(H - b) \end{aligned} \quad (2.34)$$

です。上式のモーメント  $M'$  による R r ばねを縮める力  $R_M$  は、ホイールベース  $l_f + l_r$  で除して

$$R_M = \frac{M_{ab}}{l_f + l_r} = \frac{F(H - b)}{l_f + l_r} \quad (2.35)$$

となります。一方、ばね上を突き上げる力  $Fb/a$  は、R r ばねを伸ばす力  $R_r$  になります。  $R_r$  は図（上右）の前後輪までの距離の比から

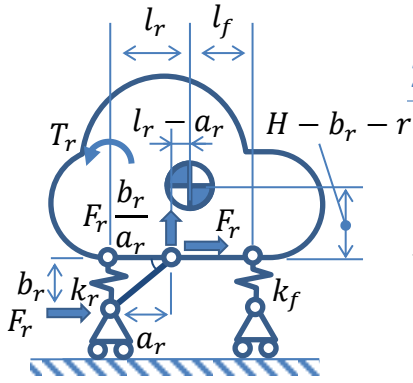
$$R_r = F \frac{b}{a} \cdot \frac{l_f + l_r - a}{l_f + l_r} = F \frac{b}{a} - \frac{Fb}{l_f + l_r} \quad (2.36)$$

です。以上、R r ばねに働く力  $R' = R_M - R_r$  は

$$R' = R_M - R_r = \frac{F(H - b)}{l_f + l_r} - \left( F \frac{b}{a} - \frac{Fb}{l_f + l_r} \right) = \frac{FH}{l_f + l_r} - F \tan \theta \quad (2.37)$$

となり、先の式(2.33)に一致しました。上式の通り  $\tan \theta$  が大きいほど、ばね上が車両後方に沈み込む動きを抑えることができます。この効果を、アンチスクォートまたは、アンチスカット、アンチピッチングと呼びます。

## 2.2.6.加速時の車両姿勢の計算 アンチスクオート



四輪駆動車の加速時の車両姿勢を計算で確認します。まず始めに図（欄外）の後輪駆動モデルの運動方程式を考えます。ピッチング慣性モーメント $I_y$ 、 $F_r$ ばね $k_f$ 、 $R_r$ ばね $k_r$ 、ばね上重心までの距離 $l_f$ 、 $l_r$ （いずれも正の値）、ばね上重心と地面の距離 $H$ 、 $R_r$ ドライブシャフト反力 $T_r = F_r r$ 、ばね上重心に働く上下力 $F_{Zr}$ 、モーメント $M_r$ とします。上方向、右回りを正とすれば、運動方程式は

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ 0 & k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_{Zr} \\ M_r \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

となります。ここで上式右辺のばね上重心に働く上下力 $F_{Zr}$ 、モーメント $M_r$ は図（欄外）の関係より

$$\begin{aligned} F_{Zr} &= F_r \frac{b_r}{a_r} \\ M_r &= -T_r - F_r(H - b_r - r) + F_r \frac{b_r}{a_r} (l_r - a_r) \\ &= -F_r r - F_r(H - b_r - r) + F_r \left( \frac{b_r}{a_r} l_r - b_r \right) \\ &= F_r \left( -H + \frac{b_r}{a_r} l_r \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

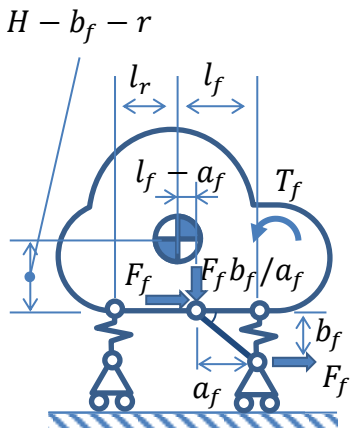
です。

次に図（欄外下）の前輪駆動モデルの運動方程式を考えます。左辺は後輪駆動モデルと同様に

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ 0 & k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f \\ F_{Zf} \\ M_f \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

です。また上式右辺は図（欄外）の関係より

$$\begin{aligned} F_{Zf} &= -F_f \frac{b_f}{a_f} \\ M_f &= -T_f - F_f(H - b_f - r) + F_f \frac{b_f}{a_f} (l_f - a_f) \\ &= -F_f r - F_f(H - b_f - r) + F_f \left( \frac{b_f}{a_f} l_f - b_f \right) \\ &= F_f \left( -H + \frac{b_f}{a_f} l_f \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$



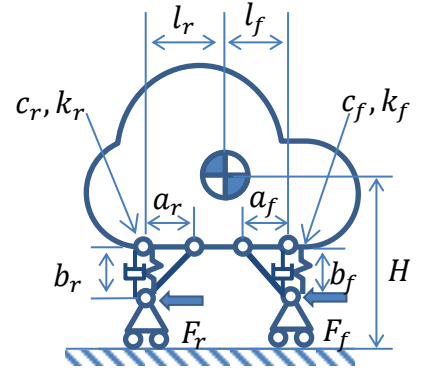
です。さてここで、前輪駆動の式(2.38)と後輪駆動の式(2.40)の違いに着目すると、右辺(ばね上重心に働く力)のみです。従って、四輪駆動時の運動方程式は、単に式(2.38)、(2.40)の右辺を重ね合わせた

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ 0 & k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f + F_r \\ F_{zf} + F_{zr} \\ M_f + M_r \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

となります。

さらに図(欄外)のように、アブソーバーによる減衰  $c_f$ 、 $c_r$  を考慮すれば、上式は

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_f + c_r & c_r l_r - c_f l_f \\ 0 & c_r l_r - c_f l_f & c_f l_f^2 + c_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ 0 & k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f + F_r \\ F_{zf} + F_{zr} \\ M_f + M_r \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$



となります。

以上より、四輪駆動車の加速時の運動方程式は、上式右辺に式(2.39)、(2.41)を代入し

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_f + c_r & c_r l_r - c_f l_f \\ 0 & c_r l_r - c_f l_f & c_f l_f^2 + c_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ 0 & k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f + F_r \\ -F_f \frac{b_f}{a_f} + F_r \frac{b_r}{a_r} \\ F_f \left( -H + \frac{b_f}{a_f} l_f \right) + F_r \left( -H + \frac{b_r}{a_r} l_r \right) \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

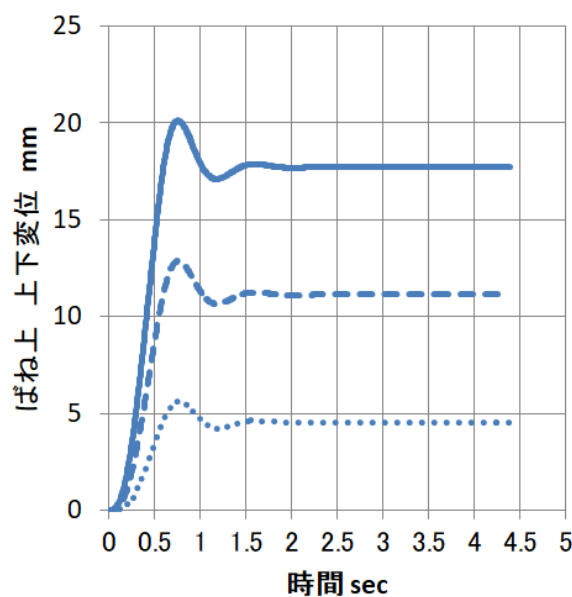
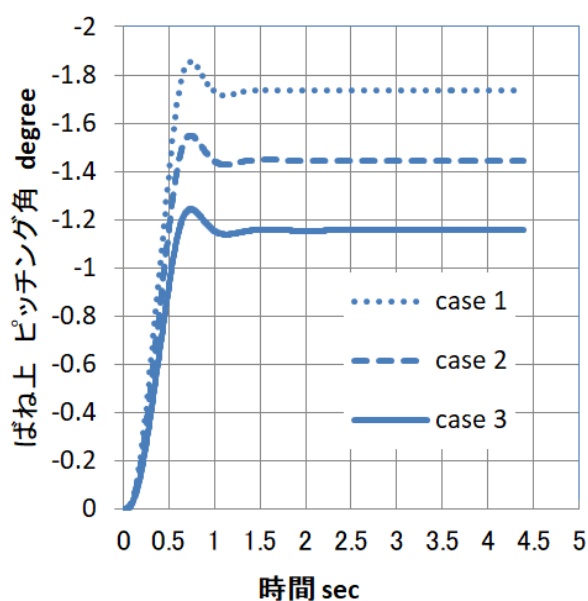
となります。



上式(2.44)をニューマークの $\beta$ 法で解いた計算結果を示します。計算諸元は、 $m = 2000\text{kg}$ 、 $I_y = 3000\text{kgm}^2$ 、 $H = 0.65\text{m}$ 、 $l_f = 1.3\text{m}$ 、 $l_r = 1.6\text{m}$ 、 $k_f, k_r = 70000\text{N/m}$ 、 $c_f, c_r = 7000\text{Ns/m}$ 、 $a_f, b_f = 0\text{m}$ 、車両の加速度は  $0.7G$  です。

表に示した3ケース（後輪アーム角度、前後駆動力配分違い）で、ばね上の車両姿勢を計算します。

諸元	単位	case 1	case 2	case 3
$a_r$	m	0	0.3	0.3
$b_r$	m	0	0.045	0.045
$\tan \theta_r (= b_r/a_r)$	-	0	0.149	0.149
前後駆動力配分	-	1 : 1	1 : 1	0 : 1

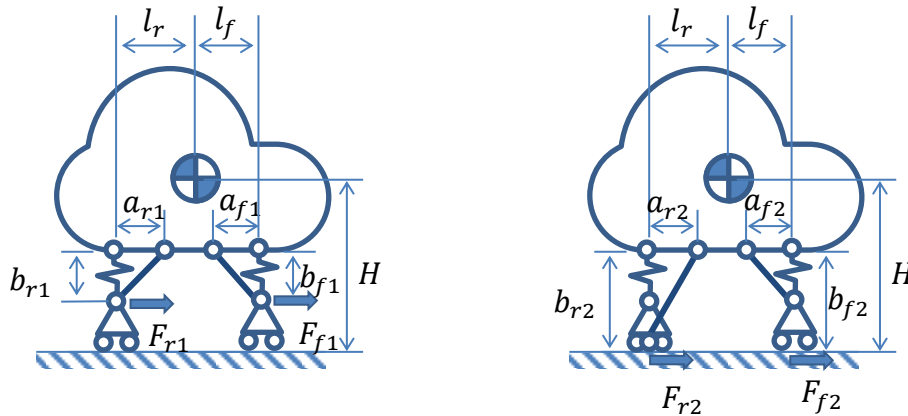


アーム角のついた case 2（四輪駆動）は、アーム角のない case 1（四輪駆動）に比べピッチング角が  $0.2\text{deg}$  低減します。また、後輪駆動の case 3 は、ピッチング角低減効果が四輪駆動の2倍です。

一方で上下変位は大きくなります。これは式(2.44)の右辺の2行目のアーム角による上下力が原因です。この上下力は、前輪と後輪で正負が逆のため、前輪のアーム配置  $a_f$ 、 $b_f$  が確保された四輪駆動では、ピッチング角を低減しつつ、上下変位を0にすることもできます。

### 2.2.7.減速時の車両姿勢の計算 アンチダイブ

減速時の車両姿勢を計算で確認します。運動方程式の立て方は、前項の「加速時の車両姿勢」と全く同じです。ただし、車に働く制動力は、エンジブレーキ（添え字 1）と、フットブレーキ（添え字 2）を考える必要があります。エンジブレーキは、加速時と同様にタイヤの回転軸に働きますが、フットブレーキはタイヤの接地面に働きます。



従って、運動方程式は前項の式(2.44)の右辺を添え字 1、2 に分けて

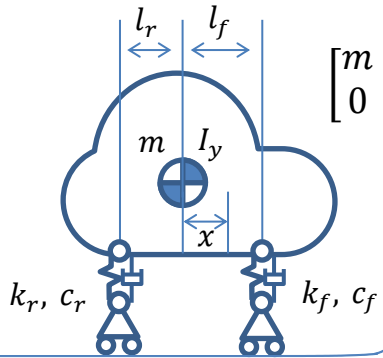
$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_f + c_r & c_r l_r - c_f l_f \\ 0 & c_r l_r - c_f l_f & c_f l_f^2 + c_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ 0 & k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} \\
 = & \left\{ \begin{array}{c} F_{f1} + F_{r1} + F_{f2} + F_{r2} \\ -F_{f1} \frac{b_{f1}}{a_{f1}} + F_{r1} \frac{b_{r1}}{a_{r1}} - F_{f2} \frac{b_{f2}}{a_{f2}} + F_{r2} \frac{b_{r2}}{a_{r2}} \\ F_{f1} \left( -H + \frac{b_{f1}}{a_{f1}} l_{f1} \right) + F_{r1} \left( -H + \frac{b_{r1}}{a_{r1}} l_{r1} \right) + F_{f2} \left( -H + \frac{b_{f2}}{a_{f2}} l_{f2} \right) + F_{r2} \left( -H + \frac{b_{r2}}{a_{r2}} l_{r2} \right) \end{array} \right\} \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

となります。上式は式(2.44)の座標系に従うため、制動力  $F_f$ 、 $F_r$ 、 $F_f$ 、 $F_r$  は負の値で与えます。

上式右辺より、高い制動性能と狙いの車両姿勢を両立するには、前後輪のアーム配置に応じて、適切な  $F_f(t)$ 、 $F_r(t)$ 、 $F_f(t)$ 、 $F_r(t)$  を与える必要があると分かります。

## 2.2.8. 段差乗り越え時の車の動き

図（欄外）の車両モデルで、段差乗り越え時の車の動きを確認します。運動方程式は



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_f + c_r & c_r l_r - c_f l_f \\ c_r l_r - c_f l_f & c_f l_f^2 + c_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{Zr} \\ M_r \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

です。前後輪の強制変位を  $z_{0f}$ 、 $z_{0r}$  とすれば、「振動の式」の強制変位入力の与え方に従い、重心に働く力

$$\begin{Bmatrix} F_{Zr} \\ M_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_f z_{0f} + k_r z_{0r} + c_f \dot{z}_{0f} + c_r \dot{z}_{0r} \\ -k_f z_{0f} l_f + k_r z_{0r} l_r - c_f \dot{z}_{0f} l_f + c_r \dot{z}_{0r} l_r \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

として与えます。以上より運動方程式は

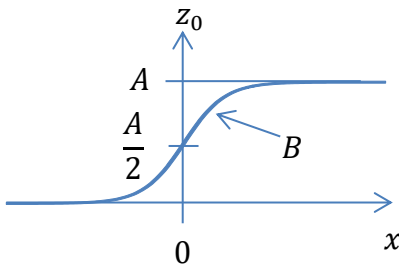
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_f + c_r & c_r l_r - c_f l_f \\ c_r l_r - c_f l_f & c_f l_f^2 + c_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f + k_r & k_r l_r - k_f l_f \\ k_r l_r - k_f l_f & k_f l_f^2 + k_r l_r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_f z_{0f} + k_r z_{0r} + c_f \dot{z}_{0f} + c_r \dot{z}_{0r} \\ -k_f z_{0f} l_f + k_r z_{0r} l_r - c_f \dot{z}_{0f} l_f + c_r \dot{z}_{0r} l_r \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

となります。上式は重心周りの式です。重心から  $x$  離れた座席の変位  $z_s$ 、 $\theta_s$  は

$$\begin{aligned} z_s &= z - \theta x \\ \theta_s &= \theta \end{aligned} \quad (2.49)$$

と計算します。

路面の強制変位はシグモイド関数を活用します。

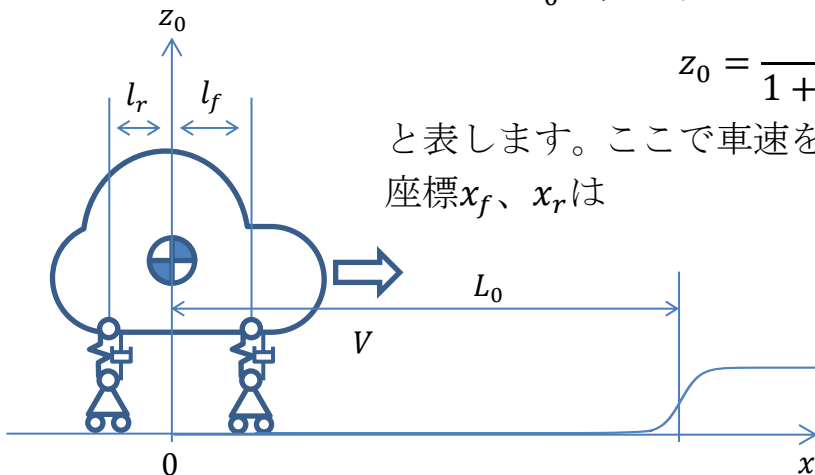


$$z_0 = \frac{A}{1 + e^{-Bx}} \quad (2.50)$$

$A$  は段差高さ、 $B$  は段差の傾きに関する係数です。上式は  $x = 0$  のとき  $A/2$  となる関数です。距離  $L_0$  で  $A/2$  とするには  $x \rightarrow x - L_0$  と置き換え

$$z_0 = \frac{A}{1 + e^{-B(x-L_0)}} \quad (2.51)$$

と表します。ここで車速を  $V$  と置けば、 $t$  秒後の前後輪の  $x$  座標  $x_f$ 、 $x_r$  は



$$\begin{aligned}x_f &= Vt + l_f \\x_r &= Vt - l_r\end{aligned}\quad (2.52)$$

です。上式を(2.51)の $x$ に代入すれば、前輪位置と後輪位置の路面変位 $z_{0f}$ 、 $z_{0r}$ は

$$\begin{aligned}z_{0f} &= \frac{A}{1 + e^{-B(Vt+l_f-L_0)}} \\z_{0r} &= \frac{A}{1 + e^{-B(Vt-l_r-L_0)}}\end{aligned}\quad (2.53)$$

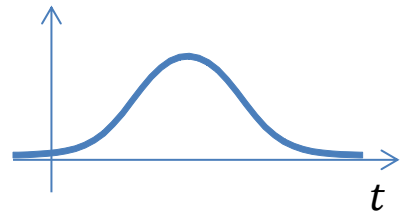
となります。

また、前後輪位置での路面速度 $\dot{z}_{0f}$ 、 $\dot{z}_{0r}$ は単位時間 $dt$ 当たりの路面変位の変化量から

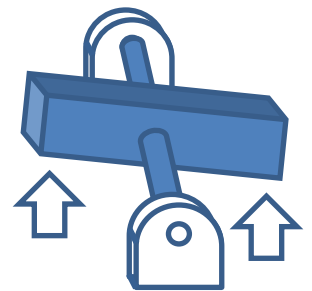
$$\begin{aligned}\dot{z}_{0f} &= \frac{z_{0f}(t+dt) - z_{0f}(t)}{dt} = \frac{\frac{A}{1 + e^{-B\{V(t+dt)+l_f-L_0\}}} - \frac{A}{1 + e^{-B(Vt+l_f-L_0)}}}{dt} \\ \dot{z}_{0r} &= \frac{z_{0r}(t+dt) - z_{0r}(t)}{dt} = \frac{\frac{A}{1 + e^{-B\{V(t+dt)-l_r-L_0\}}} - \frac{A}{1 + e^{-B(Vt-l_r-L_0)}}}{dt}\end{aligned}\quad (2.54)$$

と表せます。

今回の確認計算では、上式(2.53)、(2.54)を、2つ足し合わせた、図(欄外)のような路面変位を式(2.48)の $F_{zr}$ 、 $M_r$ に代入し、ニューマークの $\beta$ 法で計算します。



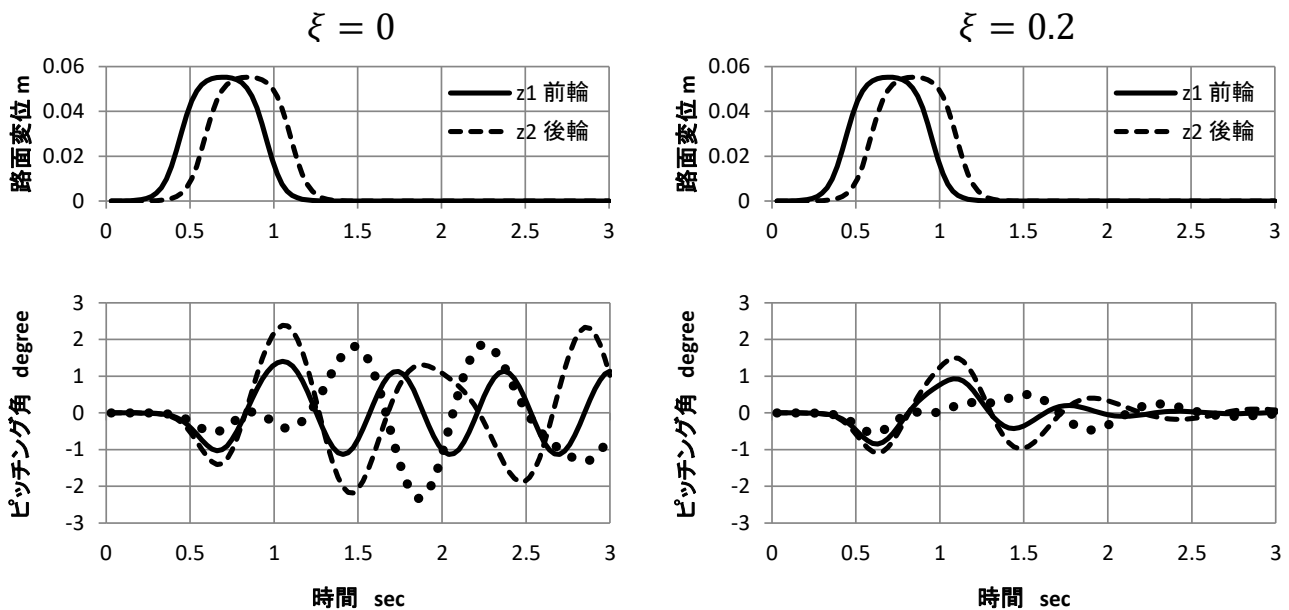
計算前に、注目点を図(欄外)のおもちゃで整理します。右側が車の前輪、左側が後輪であるとします。右側だけをたたけば、当然回転します。一方、両側を同時にたたいた場合、回転しません。これは自明です。一方、車が路面の凸凹を乗り越える場合、後輪は前輪より少し遅れて乗り越えるため、車は当然回転します。



確認計算では、車の質量 $m$ 、慣性モーメント $I_y$ 、タイヤから重心までの距離を $l_f$ 、 $l_r$ としたとき、車の回転角を小さくするに、 $k_f$ 、 $k_r$ はどうあるべきか？ ということを確認します。

前輪と後輪の中央に重心のある車で計算します。ばね定数の合計 $k_f + k_r = 14000\text{N/m}$ とし、下表のように前後比率 $k_f/(k_f + k_r)$ を変えます。減衰定数は、減衰比 $\xi$ を用いて $c_f = \xi 2\sqrt{m_f k_f}$ 、 $c_r = \xi 2\sqrt{m_r k_r}$ （前輪荷重 $m_f$ 、後輪荷重 $m_r$ ）で与えます。 $\xi = 0$ の場合（下左の図）と、 $\xi = 0.2$ の場合（下右の図）で計算します。

諸元	単位	基準	Fr硬い	Rr硬い
$m$	kg	2000	2000	2000
$I_y$	kgm <sup>2</sup>	3000	3000	3000
$l_f$	m	1.45	1.45	1.45
$l_r$	m	1.45	1.45	1.45
$k_f + k_r$	N/m	140000	140000	140000
$k_f/(k_f + k_r)$	比	0.5	0.7	0.3



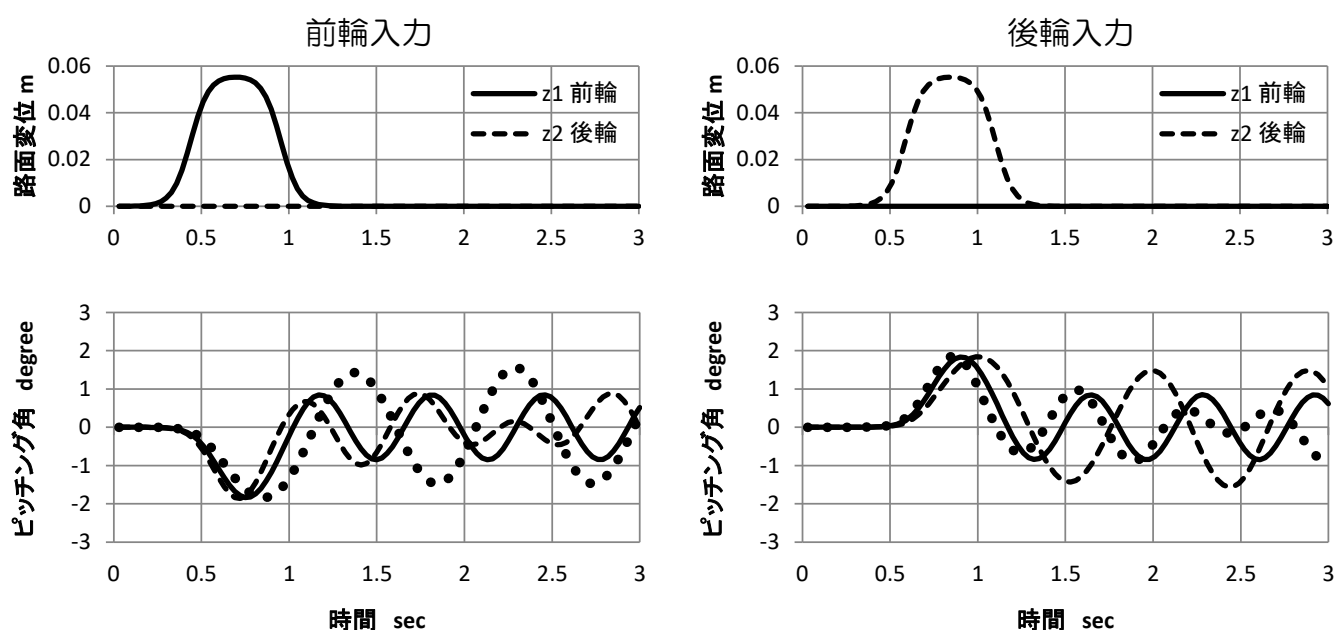
始めに、ばね $k_f$ 、 $k_r$ の影響を見るために $\xi = 0$ の計算結果（上左の図）を観察します。2山目（1.1sec）までのピッチング角は、「Rrが硬い（点線）」が最小ですが、段差を通り過ぎた後の3山目（1.5sec）は「基準（実線）」が最小です。

実際の車はアブソーバーの働きにより、段差を通り過ぎた後の振動は低減されます。仮に $\xi = 0.2$ とした場合（上右の図）、3山目（1.5sec）以降のピッチング角が一様に下がります。結果的に「Rrが硬い（点線）」場合が最小のピッチング角です。

3山目以降は減衰定数で決まることが分かりました。では、1山目、2山目のピッチング角の大きさはどのように決まっているのでしょうか。

ここでは、前輪入力と後輪入力を別々に分けて考えます。分けて考えるためには、 $\xi = 0$ の場合で考える必要があります。 $\xi = 0$ では、系の運動エネルギーが保存され、運動方程式の入力と出力の関係が線形となるからです。

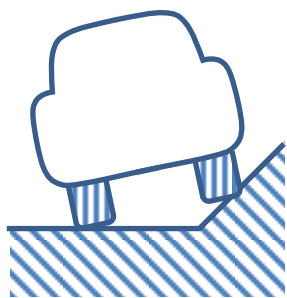
すなわち、前輪だけ入力した結果（下左の図）と、後輪だけ入力した結果（下右の図）の和が、前ページの左の図の結果に一致します。



「 $R_r$ が硬い（点線）」は他の条件に比べ、前輪入力は柔らかいばねによってピッチング角の上昇が遅くなり（左上の図）、後輪入力は、硬いばねによってピッチング角の上昇が速まります（右上の図）。

ここで、先のおもちゃの議論を思い出してください。もし前後輪の入力が同時なら、ピッチング角はゼロです。従って、前輪入力と後輪入力の時間差が最も小さい「 $R_r$ が硬い（点線）」のピッチング角が最小となります。

前ページで確認したように、3山目以降は「 $R_r$ が硬い（点線）」のピッチング角は大きくなりますが（前ページ左の図）、減衰定数を適切に与えることで解決することができます（前ページ右の図）。



## 2.3. まっすぐ進む 直進性とステア特性

図(欄外)のように、まっすぐ進む車の片輪が斜面を通過した場合、車に加わる横方向の力が車の進路を変えようとしています。このとき、車がまっすぐ進むかどうかは、いわゆる車のステア特性、NS、US、OS 特性の影響を受けます。この節では、車に横方向の外乱が加わったときの車の進む方向を簡単な式で確認します。

### 2.3.1. タイヤの横力とコーナーリングフォース

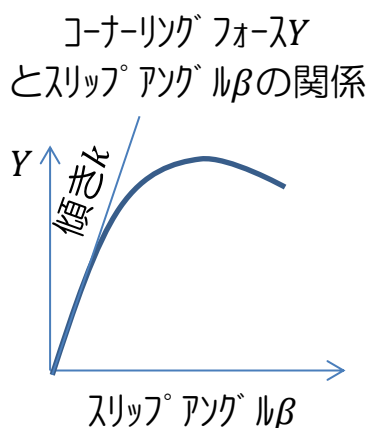
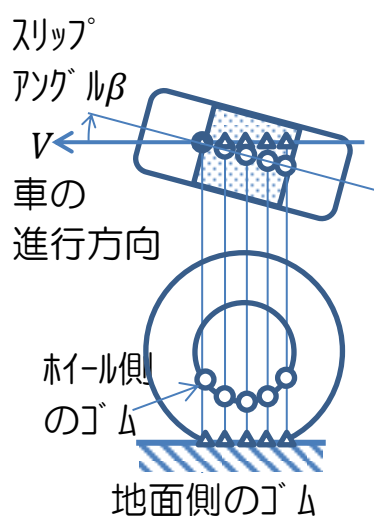
はじめに、タイヤが横方向の力を発生するメカニズムを整理しておきます。車が速度 $V$ で進んでいるとき、ステアリング操作によって、前輪の向きが角度 $\beta$ 変わったとします。このとき、車はまだまっすぐ進もうとしているため、路面に張り付いているタイヤのゴムはそのまま地面に沿って進もうとします(図の $\Delta$ )。一方、ホイール側のゴムは $\beta$ 方向に進もうとするため(図の $\circ$ )、タイヤの接地部分は後方ほど横方向にゴムが伸びてゴムの反力が大きくなります。

この接地面全体のゴムの反力を1点に置き換えた力のタイヤ直角方向成分をタイヤの横力と呼び、タイヤの進行方向の直角成分をコーナーリングフォースと呼びます。

コーナーリングフォースは図(欄外)のように、タイヤの路面側とホイール側の進む方向の角度差 $\beta$ に応じて右肩上がりの特性となります。この角度差 $\beta$ をタイヤのスリップアングルと呼びます。物理ノートでは、スリップアングル $\beta$ が小さい領域のコーナーリングフォース $Y$ はスリップアングル $\beta$ に比例すると仮定し、比例定数 $k$ を用いて

$$Y = k\beta \quad (2.55)$$

と表します。また、上式の比例定数 $k$ をコーナーリングスティフネスと呼び、特別な場合を除いて定数として扱います。



### 2.3.2.セルフアライニングトルク

車の直進性と関係の深いセルフアライニングトルクについて簡単に整理しておきます。図(欄外)のように、スリップアングルのついたタイヤは接地面の後方ほどゴムの歪が大きいので、コーナーリングフォースは接地面中心よりも車両後方に働きます。

このとき、タイヤの転舵軸（以下、キングピン軸）は、自転車と同様に、タイヤの接地面中心よりも前方に配置しているため、（自転車の前輪と同じように）コーナーリングフォースによるキングピン軸周りのモーメントが発生します。このモーメントは、タイヤのスリップアングルの常に0に戻そうとするため、セルフアライニングトルクと呼ばれます。

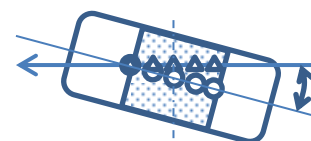
ステアリングを切っても、元に戻ろうとするのは、このセルフアライニングトルクの働きによるものです。例えば、何らかの外乱により、タイヤにスリップアングルがつき、そのコーナーリングフォースによって車の回転運動が始まっても、セルフアライニングトルクの働きによって、スリップアングルは次第に解消されます。

ここで面白いのは、セルフアライニングトルクは、ステアリングの舵角を0に戻すのではなく、スリップアングルの0、すなわち、前輪を車の進む方向に合わせるように働くことです。例えば、後輪駆動車の意図的なオーバーステアによるスピン挙動のコントロールにおいて、前輪のスリップアングルの減少させるためのカウンターステア操作は、直接手でステアリングを回さなくても、セルフアライニングトルクの働きにより、ステアリングが勝手に回って前輪のコーナーリングフォースを減少させ、スピン挙動を抑制できる場合があります。

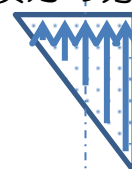
アイザック・ニュートン

計算に夢中になっていて、さっき食べたのを忘れていた。

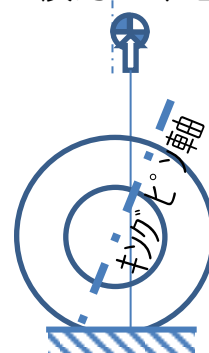
タイヤの横力の中心は  
接地面中心より後方



横力の分布



横力の中心



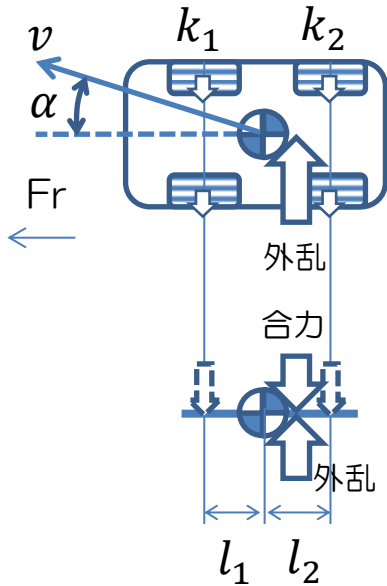
横力は常に前輪の  
舵を戻す方向に働く





### 2.3.3.ニュートラルステアポイントNSP

進行方向と車の向き  
の角度差 $\alpha$ により  
コーナーリングフォースが発生



直進する車に横方向の力を加えたとき、車が回転せずに真横に動くポイントをニュートラルステアポイント（以下、NSP）と呼びます。

今、直進している車に、横風や路面の凹凸などの外乱による横方向の力が車に加わり、進行方向だけが角度 $\alpha$ 変わったとします（車の向きは真っ直ぐ）。このとき、前後輪の向きは車の進行方向に対して左側にステアした状態であるため、コーナーリングフォースを発生します。このとき、前後輪のコーナーリングフォース $Y$ は、スリップアングル $\alpha$ を用いて

$$Y = 2\alpha k_1 + 2\alpha k_2 \quad (2.56)$$

と表されます。一方、重心周りのモーメント $M$ は

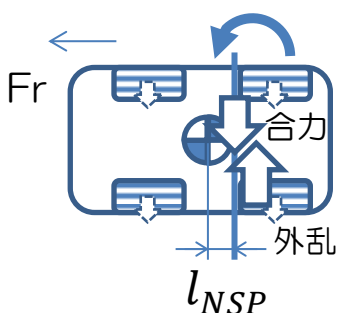
$$M = 2\alpha k_2 l_2 - 2\alpha k_1 l_1 \quad (2.57)$$

です。ここで、前後輪のコーナーリングフォース $Y$ とモーメント $M$ を重心からオフセットした1つの合力に置き換えて考えると、そのオフセット距離 $l_{NSP}$ は

$$l_{NSP} = \frac{M}{Y} = \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2} \quad (2.58)$$

と表されます。従って、外乱による車の進行方向変化によって発生した上記の合力が、外乱の力の位置に一致する場合は、回転モーメントが発生しないため車の向きは変わらず速度 $v$ の方向に動きます（この論理は時間の概念を正確に考慮していないため、あくまで概念的な表現であると思いますが、2.3.8節の数値計算で確認できます）。このような、前後輪の横力の合力の位置 $l_{NSP}$ をニュートラルステアポイントNSPと呼びます。

外乱による横力が  
NSPからずれると  
車に回転モーメントが発生



一方、図(欄外)のように、外乱による横方向の力がNSPに一致しない場合は、車に回転モーメントが働き車の向きが変化します。

例えば横風がNSPより前を押せば、車の向きは風下側、NSPより後ろを押せば風上側に向きを変えます。この現象は、ヨットが横風を利用し、帆の向き次第で船の向きを、風上、風下どちらにも向けられることに似ています。

一般に式(2.58)で定義される NSP は、車の重心からの距離ですが、参考として前輪からの距離 $l_N$ で表すと、次式のようになります。

$$\begin{aligned}
 l_N &= l_1 + l_{NSP} \\
 &= l_1 + \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2} \\
 &= \frac{k_1 l_1 + k_2 l_1 + k_2 l_2 - k_1 l_1}{k_1 + k_2} \quad (2.59) \\
 &= \frac{k_2}{k_1 + k_2} (l_1 + l_2)
 \end{aligned}$$

上式の形は、図(欄外)のように2つのばねで結合された剛体の弾性主軸（回転せずに押した方向のみに動く点）の式と同様です。弾性主軸の前を押すか、後ろを押すかで剛体の回転方向が変化することに対応します。

### 2.3.4.スタティックマージンとステア特性

$l_{NSP}$ をホイールベース $L$ で除した値はスタティックマージン $SM$ と呼ばれ、車の安定性を示す指標として用いられます。

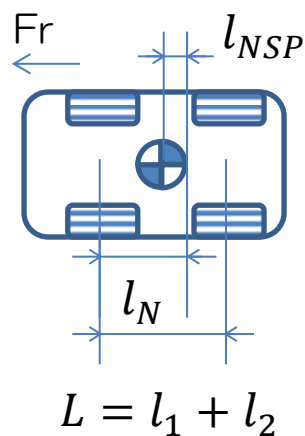
$$SM = \frac{l_{NSP}}{L} = \frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{(k_1 + k_2)(l_1 + l_2)} \quad (2.60)$$

車のステア特性は、 $SM = 0$ で NS 特性、 $SM > 0$ で US 特性、 $SM < 0$ で OS 特性と定義されます。 $SM$ の正負は上式の分子のみで決まるため

$$\begin{aligned}
 k_2 l_2 - k_1 l_1 &= 0 & \text{NS} \\
 k_2 l_2 - k_1 l_1 &> 0 & \text{US} \\
 k_2 l_2 - k_1 l_1 &< 0 & \text{OS}
 \end{aligned} \quad (2.61)$$

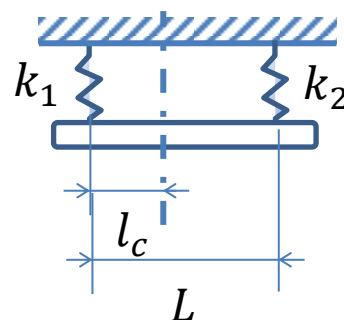
となります。上式を式(2.57)に代入すると、例えば US 特性は前輪よりも後輪の回転モーメントが勝る場合であると言えます。

上式から「タイヤのコーナーリングステイフネス $k_1$ 、 $k_2$ は一定であろうから、ステア特性は重心位置 $l_1$ 、 $l_2$ で決定される」と解釈するのは誤りです。なぜなら、コーナーリングステイフネス $k_1$ 、 $k_2$ は接地荷重の変化、すなわち重心位置の変化で増減するからです。次節では重心位置がステア特性へ及ぼす影響を簡単な式で確認します。

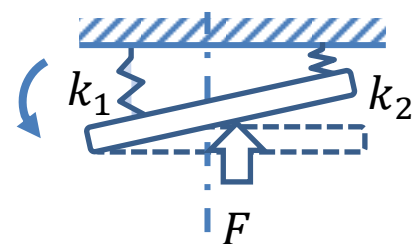


$l_N$ の式の形は弾性主軸の式と同じ

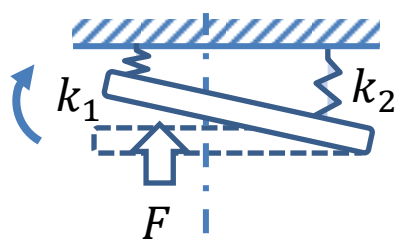
$$l_c = \frac{k_2}{k_1 + k_2} L$$



主軸の後ろを押すと半時計周りに回転

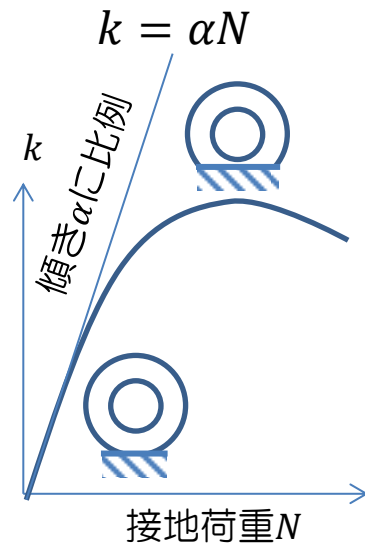


主軸の前を押すと時計回りに回転



### 2.3.5.車の重心位置とステア特性

接地荷重とコーナリングステイフネス



車の重心位置 $l_1$ 、 $l_2$ がステア特性に及ぼす影響を簡単な式で確認します。タイヤのコーナリングステイフネス $k$ は、タイヤの接地面積が増えるほど大きくなる特徴があるため、図(欄外)のように、タイヤの接地荷重に対して右肩上がりの放物線状の特性になります。

ここで、接地荷重が小さい範囲では、コーナリングステイフネス $k$ が接地荷重 $N$ に対して傾き $\alpha$ で比例すると仮定し、前後輪で同じタイヤをつけた場合の $k_1$ 、 $k_2$ を

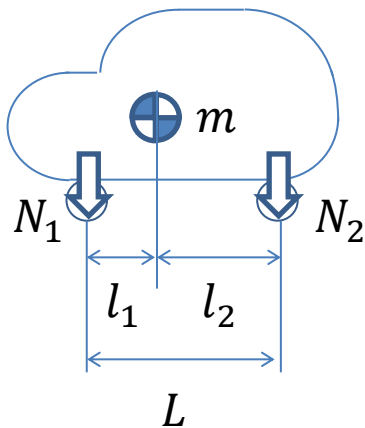
$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha N_1 \\ k_2 &= \alpha N_2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

と表します。上式の接地荷重 $N_1$ 、 $N_2$ は重心とタイヤの位置関係から

$$N_1 = \frac{l_2}{L} m \quad (2.63)$$

$$N_2 = \frac{l_1}{L} m$$

車の重心位置と前後輪の接地荷重



です。上式を車のステア特性を表す $k_2 l_2 - k_1 l_1$ に代入すると

$$\begin{aligned} k_2 l_2 - k_1 l_1 &= \alpha N_2 l_2 - \alpha N_1 l_1 \\ &= \alpha \frac{l_1}{L} l_2 m - \alpha \frac{l_2}{L} l_1 m \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

となります。上式の結果は、前後輪で同じタイヤをつけた車は、重心位置 $l_1$ 、 $l_2$ によらず常にNS特性になることを示しています。

実際には、接地荷重の大きい側のタイヤは、式(2.62)で線形の特性和と考えた場合よりも、低いコーリングステイフネスしか得られません。従って、この物理ノートでは「前輪の接地荷重>後輪の接地荷重」となる車の場合、前輪のコーナリングステイフネスの増え代が少なく、

「US特性となる(にできる)可能性がある」、という表現にとどめておきます。

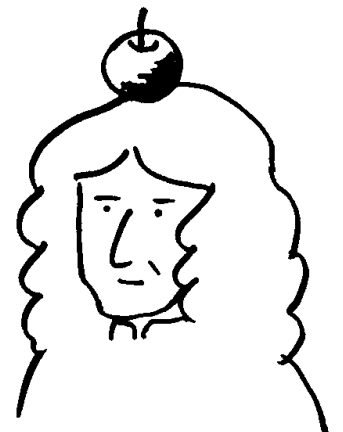
## 論語

これを知るをこれを知ると為し、  
知らざるを知らずと為す。是れ知るなり。



アイザック・ニュートン

一生を振り返るとわたしは砂浜できれいな貝がらをひろって  
喜ぶ小さな子供にすぎない。



## 2.3.6.地上基準の車の運動方程式

前項までに考えた車の直進性を、運動方程式で確認するために、車の2輪モデルを作ります。図(欄外)のように車の重心にタイヤのコーナーリングフォース $Y_1, Y_2$ が働くときの、横方向と回転方向の力の釣り合いは

$$m\ddot{y} = 2Y_1 + 2Y_2 \quad (2.65)$$

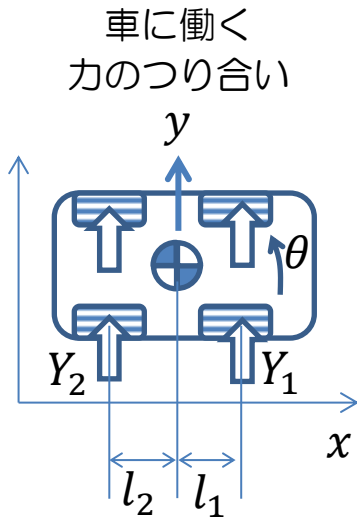
$$I\ddot{\theta} = 2l_1Y_1 - 2l_2Y_2$$

と表されます。ここで前後輪のスリップアングル $\beta_1, \beta_2$ 、コーナーリングステイフネス $k_1, k_2$ を用いて、 $Y_1 = k_1\beta_1$ 、 $Y_2 = k_2\beta_2$ と定義すれば、上式は

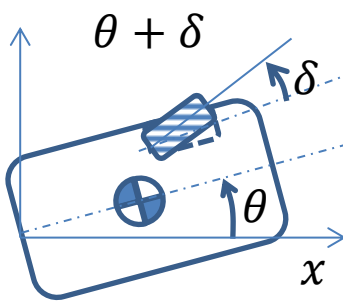
$$m\ddot{y} = 2k_1\beta_1 + 2k_2\beta_2 \quad (2.66)$$

$$I\ddot{\theta} = 2l_1k_1\beta_1 - 2l_2k_2\beta_2$$

となります。



前輪の向き



次に、上式のスリップアングル $\beta_1, \beta_2$ について考えます。前輪の向きは、図(欄外)のように車の向き $\theta$ と前輪の舵角 $\delta$ の合計です。従って、前輪のスリップアングル $\beta_1$ は、前輪の向きから、前輪位置での車の進行方向 $\phi_1$ を引いた

$$\beta_1 = \theta + \delta - \phi_1 \quad (2.67)$$

と表されます。

ここで、前輪位置での車の速度ベクトルを $(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$ と置き $\dot{x}_1 \gg \dot{y}_1$ の場合に限定すれば、進行方向 $\phi_1$ は図(欄外左下)のように $\phi_1 \approx \tan \phi_1 = \dot{y}_1 / \dot{x}_1$ と表せます。速度成分 $\dot{x}_1, \dot{y}_1$ は、車の重心の並進速度 $\dot{x}, \dot{y}$ と回転速度 $\dot{\theta}$ を用いて

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \quad (2.68)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} + l_1 \sin \theta$$

と表されますが、車の自転の角速度 $\dot{\theta}$ が小さい場合に限定すれば上式は

$$\dot{x}_1 = \dot{x} \quad (2.69)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} + l_1 \sin \theta \approx \dot{y} + l_1 \dot{\theta}$$

と表すことができます。また、車の重心の進行方向は微小角度 $\alpha$ 方向に速さ $V$ であるとすれば

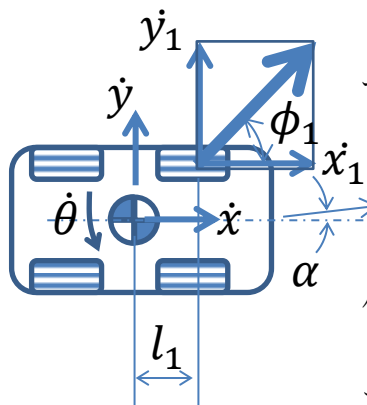
$$\dot{x} = V \cos \alpha \approx V \quad (2.70)$$

です。上式を式(2.69)に代入すれば

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = V \quad (2.71)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} + l_1 \dot{\theta}$$

前輪位置での車の進行方向 $\phi_1$



となります。

従って、前輪位置での車の進行方向 $\phi_1$ は、上式を $\phi_1 \approx \tan \phi_1 = \dot{y}_1 / \dot{x}_1$ に代入し

$$\phi_1 \approx \tan \phi_1 = \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} = \frac{\dot{y} + l_1 \dot{\theta}}{V} \quad (2.72)$$

となります。上式を式(2.67)に代入すれば、前輪のスリップアングル $\beta_1$ は

$$\beta_1 = \theta + \delta - \frac{\dot{y} + l_1 \dot{\theta}}{V} \quad (2.73)$$

と表されます。

同様の考え方で後輪位置での車の進行方向 $\phi_2$ は

$$\phi_2 = \frac{\dot{y} - l_2 \dot{\theta}}{V} \quad (2.74)$$

後輪のスリップアングル $\beta_2$ は

$$\beta_2 = \theta - \phi_2$$

$$\beta_2 = \theta - \frac{\dot{y} - l_2 \dot{\theta}}{V} \quad (2.75)$$

と表されます。

以上より、式(2.73)、(2.75)を式(2.66)に代入し

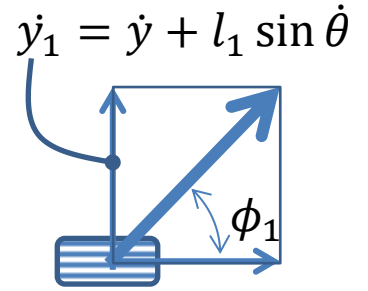
$$m\ddot{y} = 2k_1 \left( \theta + \delta - \frac{\dot{y} + \dot{\theta}l_1}{V} \right) + 2k_2 \left( \theta - \frac{\dot{y} - l_2 \dot{\theta}}{V} \right) \quad (2.76)$$

$$I\ddot{\theta} = 2l_1 k_1 \left( \theta + \delta - \frac{\dot{y} + \dot{\theta}l_1}{V} \right) - 2l_2 k_2 \left( \theta - \frac{\dot{y} - l_2 \dot{\theta}}{V} \right)$$

となります。上式を $y$ 、 $\theta$ で整理すれば、地上基準の2輪モデルの運動方程式は次のように表されます。

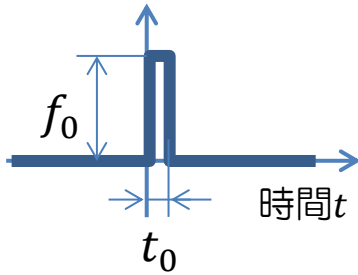
$$m\ddot{y} + \frac{2(k_1 + k_2)}{V} \dot{y} + \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \dot{\theta} - 2(k_1 + k_2)\theta = 2k_1 \delta$$

$$I\ddot{\theta} + \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \dot{\theta} - 2(k_1 l_1 - k_2 l_2)\theta + \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \dot{y} = 2k_1 l_1 \delta \quad (2.77)$$



$$\dot{x}_1 = V \cos \alpha$$

## 2.3.7.車のステア特性と直進性 式の考察

車に働く外力 $f(t)$ 

先に述べたように、まっすぐ走る車に、外乱による横方向の力が加わったときの車の運動は、力の働く位置が、NSP より前か後ろかで車の向く方向が逆になります。この現象を式で確認してみます。

舵角 $\delta = 0$ の状態、横方向の外力 $f(t)$ （時間0から時間 $t_0$ まで大きさ $f_0$ ）が重心に加わる場合、式(2.77)は

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}\dot{y} + \frac{2(k_1l_1 - k_2l_2)}{V}\dot{\theta} - 2(k_1 + k_2)\theta &= f(t) \\ I\ddot{\theta} + \frac{2(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)}{V}\dot{\theta} - 2(k_1l_1 - k_2l_2)\theta + \frac{2(k_1l_1 - k_2l_2)}{V}\dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

と表されます。上式をラプラス変換し行列の形で表すと

$$\begin{bmatrix} ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s & \frac{2(k_1l_1 - k_2l_2)}{V}s - 2(k_1 + k_2) \\ \frac{2(k_1l_1 - k_2l_2)}{V}s & Is^2 + \frac{2(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)}{V}s - 2(k_1l_1 - k_2l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{f\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

となります。

始めに重心位置が NSP に一致する NS 特性

$$k_1l_1 - k_2l_2 = 0 \quad (2.80)$$

の場合を考えます。上式を式(2.79)に代入し $\mathcal{L}\{y\}$ 、 $\mathcal{L}\{\theta\}$ について解くと

$$\begin{bmatrix} ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s & 0 - 2(k_1 + k_2) \\ 0 & Is^2 + \frac{2(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)}{V}s - 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{f\} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{\theta\} \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} Is^2 + \frac{2(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)}{V}s & 2(k_1 + k_2) \\ 0 & ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{f\} \\ 0 \end{Bmatrix}}{\left\{ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s\right\} \left\{Is^2 + \frac{2(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)}{V}s\right\}} \quad (2.81)$$

となります。ここで、車の向き $\mathcal{L}\{\theta\}$ に着目すると

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\} = \frac{0 \cdot \mathcal{L}\{f\} + \left\{ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s\right\} \cdot 0}{\left\{ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s\right\} \left\{Is^2 + \frac{2(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)}{V}s\right\}} = 0 \quad (2.82)$$

上式より、 $\theta(t) = 0$ となるため、NSの車は横方向の力が重心に働いても車の向きが変わらないという結果となります。一方、車の横方向の位置 $\mathcal{L}\{y\}$ はどうでしょうか？

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\} &= \frac{Is^2 + \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V}s}{\left\{ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s\right\} \left\{Is^2 + \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V}s\right\}} \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= \frac{1}{ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s} \cdot f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s}\end{aligned}\quad (2.83)$$

ここで、上式の逆ラプラス変換は面倒なため、最終値定理

$$y_{t=\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}\{y(t)\} \quad (2.84)$$

を使って、十分時間が経った後の車の位置 $y_{t=\infty}$ を考えることにします。上式に式(2.83)を代入し

$$\begin{aligned}y_{t=\infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{ms^2 + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}s} \cdot f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{ms + \frac{2(k_1 + k_2)}{V}} \right\} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left( f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right) \\ &= \frac{V}{2(k_1 + k_2)} \lim_{s \rightarrow 0} \left( f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right)\end{aligned}\quad (2.85)$$

ここで、 $\lim$ の項は、分母分子ともに0に収束するためロピタルの定理(L'Hôpital's rule)より

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \left( f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right) &= f_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-t_0 s})}{\frac{d}{ds}(s)} \right\} \\ &= f_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{t_0 e^{-t_0 s}}{1} \right) \\ &= f_0 t_0\end{aligned}\quad (2.86)$$

となります。上式を式(2.85)に代入し

$$y_{t=\infty} = \frac{V f_0 t_0}{2(k_1 + k_2)} \quad (2.87)$$

と求まります。以上より、NSPに横方向の力が加わった場合、車は向きを変えず横に動き、その横方向変位 $y$ 大きさは力積 $f_0 t_0$ に比例することが確認できます。



次に、 $k_1 l_1 - k_2 l_2 \neq 0$  の場合の十分に時間が経った後の車の向き  $\theta_{t=\infty}$  について考えてみます。式を簡潔に表すために

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &\equiv a \\ k_1 l_1 - k_2 l_2 &\equiv b \\ k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 &\equiv c \end{aligned} \quad (2.88)$$

と定義し、式(2.79)の  $\mathcal{L}\{y\}$ 、 $\mathcal{L}\{\theta\}$  について解きます。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ms^2 + \frac{2a}{V}s & \frac{2b}{V}s - 2a \\ \frac{2b}{V}s & Is^2 + \frac{2c}{V}s - 2b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{\theta\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{\theta\} \end{Bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} Is^2 + \frac{2c}{V}s - 2b & 2a - \frac{2b}{V}s \\ -\frac{2b}{V}s & ms^2 + \frac{2a}{V}s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \\ 0 \end{Bmatrix}}{\left(ms^2 + \frac{2a}{V}s\right)\left(Is^2 + \frac{2c}{V}s - 2b\right) - \left(\frac{2b}{V}s - 2a\right)\frac{2b}{V}s} \end{aligned} \quad (2.89)$$

ここで車の向き  $\mathcal{L}\{\theta\}$  に着目すると

$$\mathcal{L}\{\theta\} = \frac{-\frac{2b}{V}s \cdot f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} + \left(ms^2 + \frac{2a}{V}s\right) \cdot 0}{\left(ms^2 + \frac{2a}{V}s\right)\left(Is^2 + \frac{2c}{V}s - 2b\right) - \left(\frac{2b}{V}s - 2a\right)\frac{2b}{V}s} \quad (2.90)$$

となります。上式の分母を整理すると

$$\mathcal{L}\{\theta\} = \frac{-\frac{2b}{V}s \cdot f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s}}{mIs^4 + \frac{2}{V}(al + mc)s^3 + \left(\frac{4}{V^2}ac - 2mb - \frac{4}{V^2}b^2\right)s^2} \quad (2.91)$$

となります。上式に最終値定理を適用し  $\theta_{t=\infty}$  を求めます。

$$\theta_{t=\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}\{\theta\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{2b}{V}}{mIs^2 + \frac{2}{V}(al + mc)s + \frac{4}{V^2}ac - 2mb - \frac{4}{V^2}b^2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left( f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right) \quad (2.92)$$

$$= \frac{-\frac{2b}{V}}{\frac{4}{V^2}ac - 2mb - \frac{4}{V^2}b^2} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \left( f_0 \frac{1 - e^{-t_0 s}}{s} \right)$$

上式に式(2.86)を代入し、分母分子を整理すると

$$\theta_{t=\infty} = \frac{-Vbf_0t_0}{2ac - 2b^2 - V^2mb} \quad (2.93)$$

となります。ここで式(2.88)で定義した $a$ 、 $b$ 、 $c$ を元に戻して上式を整理していきます。

$$\begin{aligned} \theta_{t=\infty} &= \frac{-Vbf_0t_0}{2\{(k_1 + k_2)(k_1l_1^2 + k_2l_2^2) - (k_1l_1 - k_2l_2)^2\} - V^2mb} \\ &= \frac{-Vbf_0t_0}{2(k_1k_2l_2^2 + k_1k_2l_1^2 - 2k_1k_2l_1l_2) - V^2mb} \\ &= \frac{-Vbf_0t_0}{2k_1k_2(l_1 + l_2)^2 - V^2mb} \\ &= \frac{-Vbf_0t_0}{2k_1k_2(l_1 + l_2)^2 \left\{1 - \frac{V^2mb}{2k_1k_2(l_1 + l_2)^2}\right\}} \\ &= \frac{V(k_2l_2 - k_1l_1)f_0t_0}{2k_1k_2(l_1 + l_2)^2 \left\{1 + \frac{m(k_2l_2 - k_1l_1)}{2k_1k_2(l_1 + l_2)^2}V^2\right\}} \end{aligned} \quad (2.94)$$

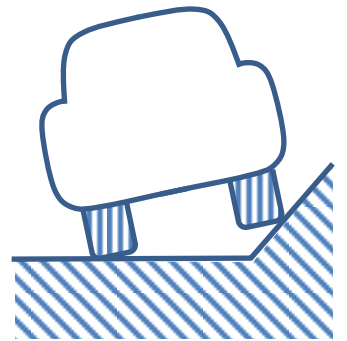
上式について考えます。 $k_2l_2 - k_1l_1 > 0$ (US)の場合、 $\theta_{t=\infty}$ は常に正となるため、車の向きは外乱に沿って変わります。また、車速 $V$ が大きいほど、外乱 $f_0t_0$ に対する車の向きの変化は小さくなります。

一方、 $k_2l_2 - k_1l_1 < 0$ (OS)の場合、上式の分子は負となるため、車は外乱の方へ向きを変えます。また、車速 $V$ が大きいほど、式(2.94)の分母の中の大括弧

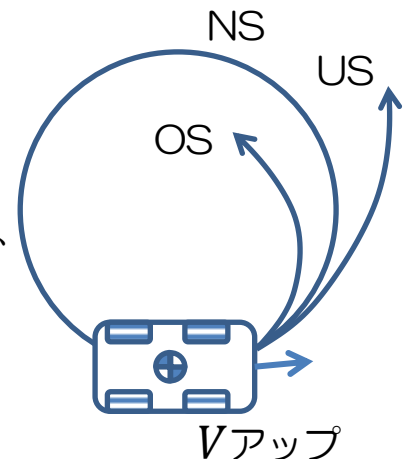
$$\left\{1 + \frac{m(k_2l_2 - k_1l_1)}{2k_1k_2(l_1 + l_2)^2}V^2\right\} \quad (2.95)$$

が0に近づくため、外乱 $f_0t_0$ に対する車の向きの変化は大きくなります。また、上式が0となる速度では $\theta_{t=\infty} = \infty$ となります。

ここでの計算は、あくまでも車の重心に横方向の外乱が加わる特別な場合です。車の重心に横方向の力が直接働く状況としては、図(欄外)のように斜面を進む場合や、旋回中の車速アップにより遠心力が増える場合があります。例えばOSの車が斜面を進む場合、車の向きは斜面を登る方向に変化します。これは、一般のドライバーには運転しづらい車ではないでしょうか。



旋回中の車速アップ



### 2.3.8. 段差乗り越え時の車の直進性の計算

前節の運動方程式の考察を Excel を使った数値計算で確認してみます。式(2.77)を行列の形で表します。

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2(k_1 + k_2)}{V} & \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} & \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2(k_1 + k_2) \\ 0 & -2(k_1 l_1 - k_2 l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 \delta + Y \\ 2k_1 l_1 \delta \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

ここで、Excel の行列計算をやり易くするために上式を

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

と置きかえ、行列  $M$ 、 $C$ 、 $K$  の値をセルに入力していきます。まず、車の情報を入力します。

	A	B	C	D
1	$m$	1000	kg	車の質量
2	$I$	4000	kg · m <sup>2</sup>	車の慣性モーメント
3	$l_1$	2	m	重心から前輪までの距離
4	$l_2$	2	m	重心から後輪までの距離
5	$k_1$	70000	N/rad	前輪のコーナーリングステイフネス
6	$k_2$	30000	N/rad	後輪のコーナーリングステイフネス
7	$V$	16.66	m/s	車の速度

次に計算で用いる行列  $M$ 、 $C$ 、 $K$  のセルに数式を入力します。

加速度の項の行列  $M$

	A	B
11	=B1	0
12	0	=B2

速度の項の行列  $C$

	A	B
13	=2/B7*(B5+B6)	=2/B7*(B3*B5-B4*B6)
14	=B13	=2/B7*(B3^2*B5+B4^2*B6)

変位の項の行列  $K$

	A	B
15	0	=-2*(B5+B6)
16	0	=-2*(B3*B5-B4*B6)

ここで、式(2.97)の右辺の外力 $f_1$ 、 $f_2$ を過渡的な入力として与えるために次のようにセルを組みます。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
20	$t$	$\ddot{y}$	$\ddot{\theta}$	$\dot{y}$	$\dot{\theta}$	$y$	$\theta$	$f_1$	$f_2$	$\delta$	$Y$
21	0.01										
22											
23											

ここで、外力 $f_1$ 、 $f_2$ は式(2.96)に従い、前輪の舵角 $\delta$ と重心への横方向の外力 $Y$ の和として、次のように入力します。

H22 セル=2\*\$B\$5\*J22+K22

I22 セル=2\*\$B\$5\*\$B\$3\*J22

また、時間刻みは $dt = 0.01$ とし

A21 セル=0.01

A22 セル=\$A\$21+A21

と入力し、A列下方向にコピーします。

次に数値計算部分を作成します。運動方程式(2.96)は車のステア特性によっては、発散する要因を含むため、2.1.1項で整理したニューマークの $\beta$ 法を利用します。式(2.9)より、次の時間 $t + dt$ の加速度 $\ddot{y}(t + dt)$ 、 $\ddot{\theta}(t + dt)$ は、次の時間の外力 $f(t + dt)$ と現在時間の値を使って

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{y}(t + dt) \\ \ddot{\theta}(t + dt) \end{Bmatrix} = \left[ M + \frac{dt}{2} C + \frac{dt^2}{4} K \right]^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(t + dt) \\ f_2(t + dt) \end{Bmatrix} \\ - C \left( \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{dt}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \right) - K \left( \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} + dt \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{dt^2}{4} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2.98)$$

と表されます。上式を Excel の行列計算の文法に従って、次のように入力します。B22セルとC22セルを同時に選択し、数式窓に

```
=TRANSPOSE(MMULT(MINVERSE($A$11:$B$12+$A$21/2*$A$14:$B$15+$A$21^2/4*$A$17:$B$18),TRANSPOSE(H22:I22)-MMULT($A$14:$B$15,TRANSPOSE(D21:E21)+$A$21/2*TRANSPOSE(B21:C21))-MMULT($A$17:$B$18,TRANSPOSE(F21:G21)+$A$21*TRANSPOSE(D21:E21)+$A$21^2/4*TRANSPOSE(B21:C21))))
```

と入力し、Ctrl+Shift+Enter を押し、行列計算の設定を行います。

次に、式(2.10)より、次の時間 $t + dt$ の速度は

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}(t + dt) \\ \dot{\theta}(t + dt) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{dt}{2} \begin{Bmatrix} \ddot{y}(t) + \ddot{y}(t + dt) \\ \ddot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t + dt) \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

と表されます。D22セルとE22セルを同時に選択し、  
=D21:E21+\$A\$21/2\*(B22:C22+B21:C21)

Ctrl+Shift+Enter を押して設定します。

また、式(2.10)より、次の時間 $t + dt$ の変位は

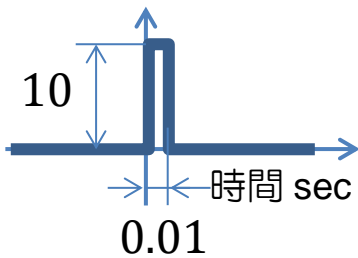
$$\begin{Bmatrix} y(t + dt) \\ \theta(t + dt) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} + dt \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{dt^2}{4} \begin{Bmatrix} \ddot{y}(t) + \ddot{y}(t + dt) \\ \ddot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t + dt) \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

と表されます。F22セルとG22セルを同時に選択し  
=F21:G21+\$A\$21\*D21:E21+\$A\$21^2/4\*(B22:C22+B21:C21)

Ctrl+Shift+Enter を押して設定します。

最後に B~K 列の内容を列の下方方向にコピーします。  
以上で Excel の準備は完了です。B21~G21セルに初期値を入力し、J、K列に過渡的な前輪の舵角 $\delta$ と重心への横方向の外力 $Y$ を与えれば、計算が実行されます。

車に働く外力 $F(t)$



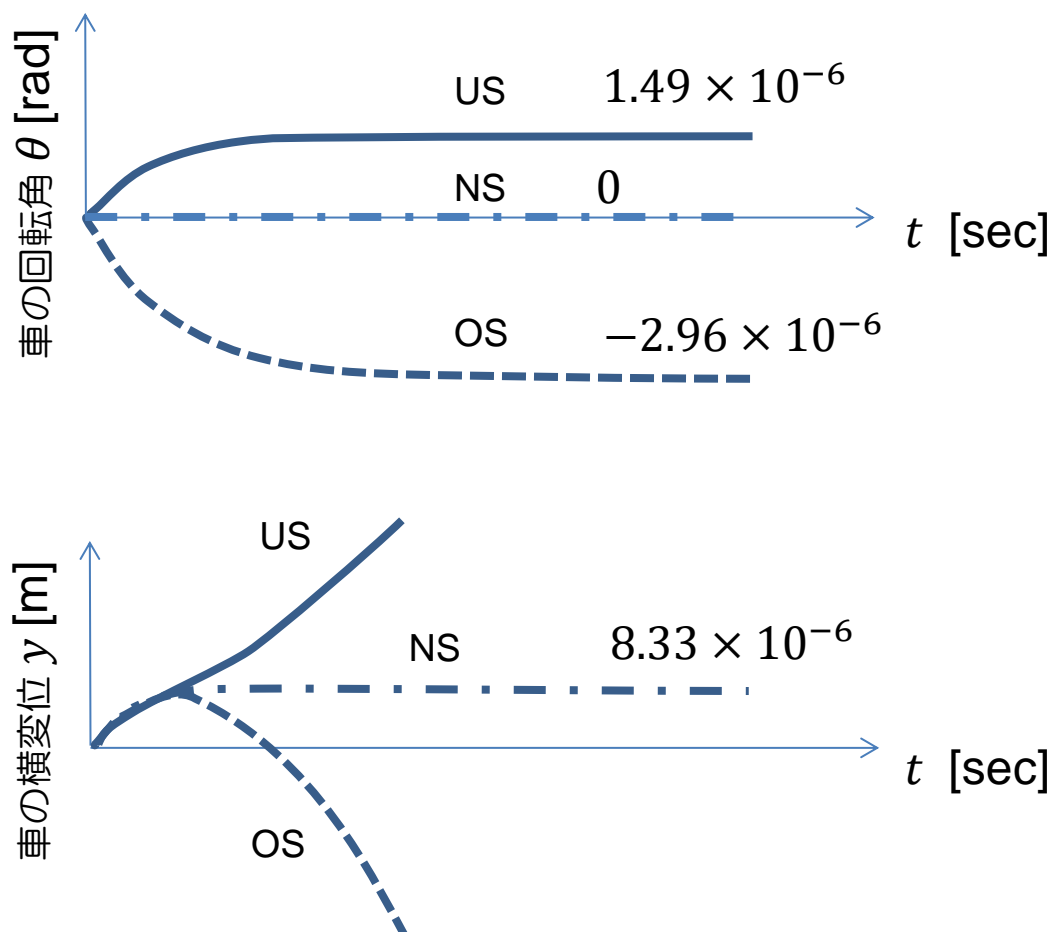
ここでは一例として、ステアリングをしっかりと握って  
( $\delta = 0$ ) 車速 60 km/h で走行中の車に、図(欄外)のように 0.01 sec の間 10 N の力を車の重心に加えた計算を行います。車の特性は

$m$	1000	kg	車の質量
$I$	4000	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	車の慣性モーメント
$l_1$	2	m	重心から前輪までの距離
$l_2$	2	m	重心から後輪までの距離
$V$	16.66	m/s	車の速度

です。また、タイヤのコーナーリングステイフネスは (単位は N/rad)

	US	NS	OS
$k_1$	70000	50000	30000
$k_2$	30000	50000	70000

の 3 ケースで比較します。



前項の式(2.94)の考察通り、OSの車は外乱の力に向かうように車が進むという面白い結果が得られます。慣れれば運転できなくはないですが、一般の車としては難しい操作性です。

上記の計算では、舵角 $\delta = 0$ を固定し、セルフアライニングトルクによる $\delta$ の変化を無視しているため、US、NS、OSの差がはっきりと出ました。しかし、ドライバーがステアリングをがっちり固定せず、ゆるく握った状態ならば、セルフアライニングトルクが前輪のスリップアングルを減らすように前輪の舵角 $\delta$ を修正するため、NS、OSの車もUSに近い挙動を示すと考えられます。

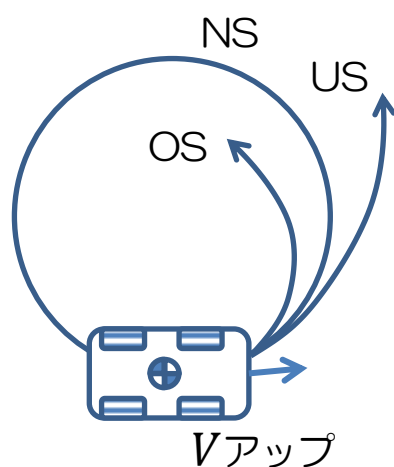
最後に式(2.87)で使用した最終値定理の確認をしておきます。式(2.87)に前ページのNSの車の特性値を代入します。

$$\begin{aligned}
 y_{t=\infty} &= \frac{Vf_0t_0}{2(k_1 + k_2)} \\
 &= \frac{16.66\text{m/sec} \times 10\text{N} \times 0.01\text{sec}}{2 \times (50000\text{N/rad} + 50000\text{N/rad})} = 8.33 \times 10^{-6}
 \end{aligned}
 \tag{2.101}$$

上図(欄外)の数値計算の値と一致しました。

## 2.4. 曲がる ステア特性とステアリング操作

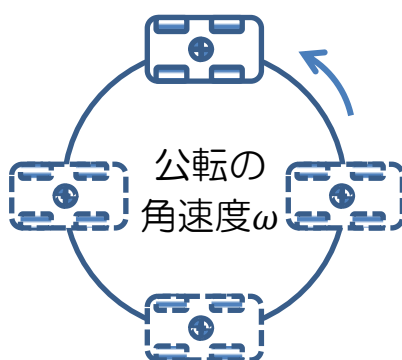
車のステア特性



ステアリングの舵角を一定にして円旋回を行ったとき、車速によらず同じ旋回半径で走行できる車をニュートラルステア (NS)。車速が上がって、旋回半径が大きくなる車をアンダーステア (US)、旋回半径が小さくなる車をオーバーステア (OS) と定義し、これらを車のステア特性と呼びます。

US の車の場合、車速を上げたときに旋回半径を維持するためには、ステアリングを切り増す必要があります。車が「曲がる」ことに対し一見ネガティブな印象を受けますが、別の見方をすれば、ステアリングを操作しなくても、アクセルペダル操作だけで旋回半径を調整できると考えることもできます。

この節では、車が円旋回を行うために必要なステアリングの操作量が、車のステア特性によってどの程度変わってくるかを簡単な計算で確認します。



自転の角速度ω



### 2.4.1. 定常円旋回中の車のコーナーリングフォース

速度一定、半径一定の円旋回を定常円旋回と言います。定常円旋回中の車は、地球の周りを回る静止衛星と似た状況、すなわち、車の公転の角速度と自転の角速度が等しい状態です。従って、旋回半径 $R$ 、車速 $v$ とすれば、公転と自転の角速度 $\omega$ はいずれも

$$\begin{aligned} v &= R\omega \\ \omega &= \frac{v}{R} \end{aligned} \quad (2.102)$$

と表されます。定常円旋回では、遠心力と前後輪のコーナーリングフォース $Y_1$ 、 $Y_2$ が釣り合うため

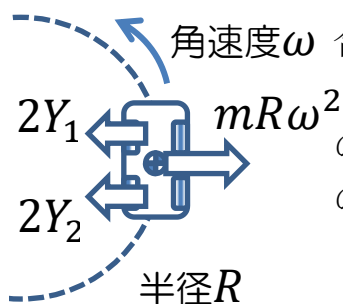
$$mR\omega^2 = mR \left(\frac{v}{R}\right)^2 = m \frac{v^2}{R} = 2Y_1 + 2Y_2 \quad (2.103)$$

の関係があります。また、回転方向のモーメントも釣り合うため

$$Y_1 l_1 - Y_2 l_2 = 0 \quad (2.104)$$

の関係から前輪と後輪で必要なコーナーリングフォースの比が決まります。

横力と遠心力の  
釣り合い



上式のコーナーリングフォース $Y_1, Y_2$ を得るために必要な、前輪の舵角 $\delta$ 、車の回転角 $\theta$ を考えます。前後輪のスリップアングル $\beta_1, \beta_2$ 、前後輪のコーナーリングステイフネス $k_1, k_2$ と置けば、コーナーリングフォース $Y_1, Y_2$ は

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 k_1 \\ Y_2 &= \beta_2 k_2 \end{aligned} \quad (2.105)$$

と表されます。上式のスリップアングル $\beta_1, \beta_2$ は、前後輪の向きと、前後輪位置での車の進行方向 $\alpha_1, \alpha_2$ の差であるため

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 k_1 = (\theta_1 - \alpha_1) k_1 \\ Y_2 &= \beta_2 k_2 = (\theta_2 - \alpha_2) k_2 \end{aligned} \quad (2.106)$$

となります。

始めにタイヤの向き $\theta_1, \theta_2$ を考えます。前輪の向き $\theta_1$ は、ステアリングを切ること増減させることができます。一方、後輪の向きを変えるためには、図(欄外)のように車が旋回円の内側に回転する必要があります。図(欄外)のように車の回転角 $\theta$ 、前輪の舵角 $\delta$ と置けば、前輪の向きは $\theta_1 = \theta + \delta$ 、後輪の向きは $\theta_2 = \theta$ となります。

次に、タイヤの位置での車の進行方向 $\alpha_1, \alpha_2$ は図(欄外下)の位置関係から

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= l_1/R \\ \tan \alpha_2 &= -l_2/R \end{aligned} \quad (2.107)$$

です。車の場合およそ $l_1, l_2 \ll R$ であるため上式は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\approx \tan \alpha_1 = l_1/R \\ \alpha_2 &\approx \tan \alpha_2 = -l_2/R \end{aligned} \quad (2.108)$$

と考えることができます。例えば、ホイールベース $2.8\text{m}$ ( $l_1 = l_2 = 1.4\text{m}$ )の車が半径 $R = 10\text{m}$ の旋回を行う場合、 $l_1/R = 0.280\text{rad}$ 、およそ $16$ 度です。このとき、 $\tan(0.280) = 0.287544$ となるため、誤差は $3\%$ 程度です。

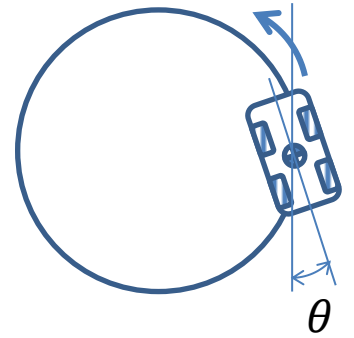
以上より、前後輪のコーナーリングフォース $Y_1, Y_2$ は、式(2.106)に式(2.108)、 $\theta_1 = \theta + \delta$ 、 $\theta_2 = \theta$ を代入し

$$Y_1 = (\theta_1 - \alpha_1) k_1 = \left( \theta + \delta - \frac{l_1}{R} \right) k_1$$

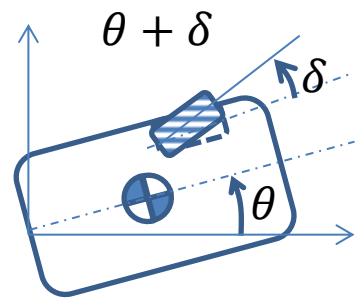
$$Y_2 = (\theta_2 - \alpha_2) k_2 = \left( \theta + \frac{l_2}{R} \right) k_2$$

と表されます。

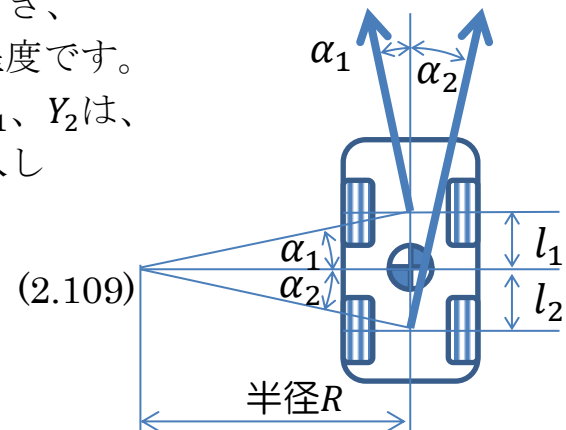
後輪の向き =  
車の回転角 $\theta$



前輪の向き



前後輪位置  
での車の進行方向



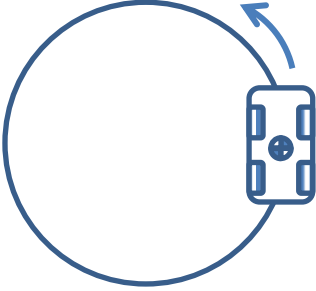


## 2.4.2.ステア特性とステアリング操作

欧州の自動車法規

車速 $v=80\text{km/h}$

半径 $R=100\text{m}$



欧州の自動車法規に「車速 80km/h で R100 の旋回走行が可能であること」というものがあります。これを行うためのステアリング操作量について、具体的な数値で確認したいと思います。

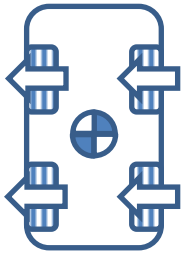
車の質量を 1500kg、2 名乗車時の質量を 1620kg とすれば、その遠心力は

$$m \frac{v^2}{R} = 1620\text{kg} \times \frac{(22.22\text{m/s})^2}{100\text{m}} = 8000\text{N} \quad (2.110)$$

であるため、式(2.103)より 4 輪合計で 8000N のコーナーリングフォースが必要になります。

$$2Y_1 + 2Y_2 = 8000 \quad (2.111)$$

各タイヤで  
2000N 必要



次に、上式のコーナーリングフォース $Y_1$ 、 $Y_2$ の配分を考えます。ここでは計算を簡単にするために、重心から前後輪までの距離が等しい車で考えます。ホイールベースを 2.8m とすれば、重心から前後輪までの距離は $l_1 = l_2 = 1.4\text{m}$ です。従って、式(2.104)の車の回転方向のモーメントのつり合いから、各々のタイヤで 2000N のコーナーリングフォースが必要であることがわかります。

ここで、前後輪位置での車の進行方向 $\alpha$ は式(2.108)から

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{1.4\text{m}}{100\text{m}} = 0.014\text{rad} = 0.80\text{deg} \quad (2.112)$$

であるため、前後輪のコーナーリングフォース $Y_1$ 、 $Y_2$ は、上式を式(2.109)に代入し

$$Y_1 = 2000\text{N} = k_1(\theta + \delta - 0.8\text{deg}) \quad (2.113)$$

$$Y_2 = 2000\text{N} = k_2(\theta + 0.8\text{deg}) \quad (2.114)$$

と表されます。

それでは式(2.113)、(2.114)を使って、前後のタイヤで必要な横力 2000N を得るために必要なステアリングの舵角 $\delta$ を、タイヤのコーナーリングスティフネス $k_1$ 、 $k_2$ の異なる NS、OS、US の車で計算してみます。

## 1) NS の車

始めに基準の特性として $k_1 = k_2 = 1000\text{N/deg}$ の場合の、前輪に必要な舵角 $\delta$ を計算します。まず、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.114)より

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (\theta + 0.8\text{deg}) \\ 2\text{deg} &= \theta + 0.8\text{deg} \\ \therefore \theta &= 1.2\text{deg} \end{aligned} \quad (2.115)$$

です。上式を式(2.113)に代入し、前輪に必要な舵角 $\delta$ は

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (1.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 2\text{deg} &= 1.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \\ \therefore \delta &= 1.6\text{deg} \end{aligned} \quad (2.116)$$

と求まります。ここからは $\delta = 1.6\text{deg}$ を基準に、US、OSの車で必要な前輪の舵角 $\delta$ を見ていきます。

## 2) US の車

上記 NS の車（以下、基準の車）に比べ、前輪のコーナーリングステイフネスを半分にしたとき、前輪に必要な舵角 $\delta$ はいくらでしょうか？  $k_1 = 500\text{N/deg}$ 、 $k_2 = 1000\text{N/deg}$ の場合、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.115)と同様に $\theta = 1.2\text{deg}$ です。これを式(2.113)に代入し

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 500\text{N/deg} \times (1.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 4\text{deg} &= 1.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \\ \therefore \delta &= 3.6\text{deg} \end{aligned} \quad (2.117)$$

と求まります。前輪のコーナーリングステイフネス $k_1$ が小さいため、基準の車よりも大きい舵角 $\delta$ が必要です。

一方、基準の車に比べて、後輪のコーナーリングステイフネスを倍にしたときはどうでしょうか？

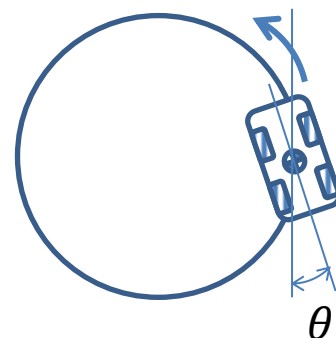
$k_1 = 1000\text{N/deg}$ 、 $k_2 = 2000\text{N/deg}$ の場合、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.114)より

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 2000\text{N/deg} \times (\theta + 0.8\text{deg}) \\ 1\text{deg} &= \theta + 0.8\text{deg} \\ \therefore \theta &= 0.4\text{deg} \end{aligned} \quad (2.118)$$

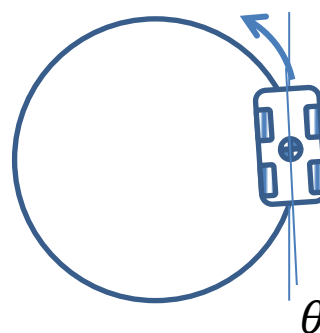
です。式(2.115)の基準の車に比べて少ない回転角で済みます。上式を式(2.113)に代入し、前輪に必要な舵角 $\delta$ は

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (0.4\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 2\text{deg} &= 0.4\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \end{aligned} \quad (2.119)$$

後輪に必要な  
車の回転角 $\theta = 1.2$



後輪に必要な  
車の回転角 $\theta = 0.4$



$$\therefore \delta = 2.6\text{deg}$$

と求まります。車の回転角 $\theta$ が小さくなった分、前輪のコーナーリングフォースが不足し、式(2.116)の基準の車よりも大きな舵角 $\delta$ が必要になります。このように基準の車に対して、コーナーリングステイフネスが増えても減っても、必要な舵角 $\delta$ が増えることが面白い特徴です。

### 3) OS の車

基準の車に比べて前輪のコーナーリングステイフネスを倍にした車で、前輪に必要な舵角 $\delta$ を計算します。

$k_1 = 2000\text{N/deg}$ 、 $k_2 = 1000\text{N/deg}$ の場合、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.115)と同様に $\theta = 1.2\text{deg}$ です。これを式(2.113)に代入し

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 2000\text{N/deg} \times (1.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 1\text{deg} &= 1.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\therefore \delta = 0.6\text{deg}$$

と求まります。前輪のコーナーリングステイフネス $k_1$ が大きいため、式(2.116)の基準の車に比べて必要な舵角 $\delta$ は小さくなります。

一方、基準の車に比べて、後輪のコーナーリングステイフネスを半分にしたときはどうでしょうか？

$k_1 = 1000\text{N/deg}$ 、 $k_2 = 500\text{N/deg}$ の場合、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.114)より

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 500\text{N/deg} \times (\theta + 0.8\text{deg}) \\ 4\text{deg} &= \theta + 0.8\text{deg} \\ \therefore \theta &= 3.2\text{deg} \end{aligned} \quad (2.121)$$

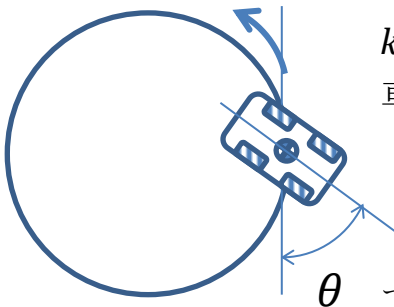
です。これを式(2.113)に代入し、前輪に必要な舵角 $\delta$ は

$$\begin{aligned} 2000\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (3.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 2\text{deg} &= 3.2\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\therefore \delta = -0.4\text{deg}$$

と求まります。車の回転角 $\theta$ が大きくなった分、前輪のコーナーリングフォースが過大となるため、ステアリングを旋回方向の逆側に操作する必要があります。この操作はカウンターステアと呼ばれ、後輪駆動車での意図的なオーバーステアによるスピン挙動のコントロールで必要になります。

後輪に必要な  
車の回転角 $\theta = 3.2$



次に、速度が上がり遠心力が増加したときの舵角 $\delta$ を考えます。車速 88km/h で R100 の旋回走行を行う場合、必要な車のコーナーリングフォースは

$$m \frac{v^2}{R} = 1620\text{kg} \times \frac{(24.44\text{m/s})^2}{100\text{m}} = 9680\text{N} \quad (2.123)$$

となります。従って、前後輪のコーナーリングフォース $Y_1$ 、 $Y_2$ は、式(2.113)と式(2.114)から次のように表されます。

$$Y_1 = 2420\text{N} = k_1(\theta + \delta - 0.8\text{deg}) \quad (2.124)$$

$$Y_2 = 2420\text{N} = k_2(\theta + 0.8\text{deg}) \quad (2.125)$$

例えば前述の  $k_1 = k_2 = 1000\text{N/deg}$  の NS の車の場合、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.125)より

$$\begin{aligned} 2420\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (\theta + 0.8\text{deg}) \\ 2.42\text{deg} &= \theta + 0.8\text{deg} \\ \therefore \theta &= 1.62\text{deg} \end{aligned} \quad (2.126)$$

となり、式(2.115)に比べて車の回転角は0.02deg大きくなります。これを式(2.124)に代入し、前輪に必要な舵角 $\delta$ は

$$\begin{aligned} 2420\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (1.62\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 2.42\text{deg} &= 1.62\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \\ \therefore \delta &= 1.6\text{deg} \end{aligned} \quad (2.127)$$

と求まります。上式と式(2.116)を比べてわかるように NS の車は速度が変化しても舵角 $\delta$ を変化させる必要がありません。

また、前述の  $k_1 = 1000\text{N/deg}$ 、 $k_2 = 2000\text{N/deg}$  の US の車の場合、後輪に必要な車の回転角 $\theta$ は式(2.125)より

$$\begin{aligned} 2420\text{N} &= 2000\text{N/deg} \times (\theta + 0.8\text{deg}) \\ 1.21\text{deg} &= \theta + 0.8\text{deg} \\ \therefore \theta &= 0.41\text{deg} \end{aligned} \quad (2.128)$$

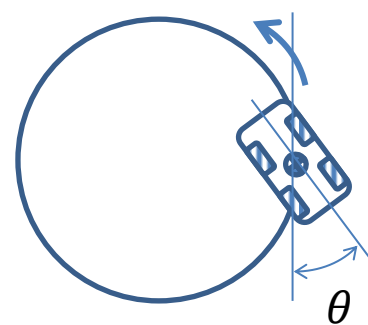
となり、式(2.118)に比べて車の回転角は0.01deg大きくなります。上式を式(2.124)に代入し、前輪に必要な舵角 $\delta$ は

$$\begin{aligned} 2420\text{N} &= 1000\text{N/deg} \times (0.41\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg}) \\ 2.42\text{deg} &= 0.41\text{deg} + \delta - 0.8\text{deg} \\ \therefore \delta &= 2.81\text{deg} \end{aligned} \quad (2.129)$$

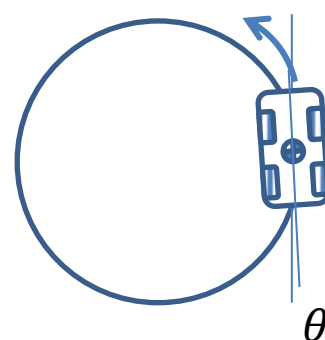
と求まります。式(2.119)に比べ、ステアリングによる前輪の舵角を0.21deg切り増す必要があることがわかります。

一方、計算は割愛しますが  $k_1 = 1000\text{N/deg}$ 、 $k_2 = 2000\text{N/deg}$  の OS の車では、前輪の舵角 $\delta$ を0.39deg減らす必要があります。

後輪に必要な  
車の回転角 $\theta = 1.62$



後輪に必要な  
車の回転角 $\theta = 0.41$

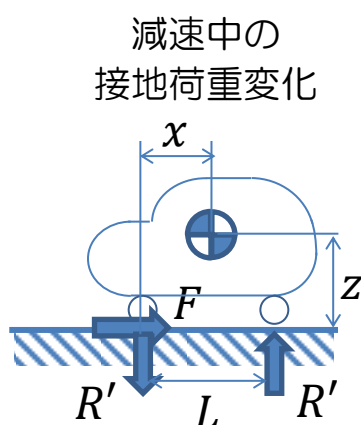


### 2.4.3.一般的な車のステア特性とコーナリング

一般的な車のステア特性は、弱い US 特性に設定されています。なぜでしょうか？ 前項の結果を手掛かりにして、その理由を考えたいと思います。

前項で見てきたように、定常円旋回に必要な舵角 $\delta$ は OS、NS、US の順に大きくなるため、US が強すぎる車は、ステアリングを切っても曲がらない車です。

一方、OS の車は少ない操舵でよく曲がりますが、旋回方向の逆側にステアリングを操作する（カウンターステア）状況が起こります。素早く正確な操作で車の回転を止める運転技術が要求されるため、一般のドライバーには操作しづらい車です。



このように考えると、NS の車が理想的に思えますが、NS の車はあくまでピンポイントの特性であり、加減速による前後輪の接地荷重変化で OS、US が頻繁に入れ替わる、これまた操作の難しい車です。特に、旋回中にブレーキを行うと、前輪のコーナリングフォースが増加し、車が OS の挙動となるため、素早く正確にステアリングを戻さないとスピンに至る場合があります。

以上の理由から、通常の市販車は弱い US 特性に設定されます。弱い US 特性でありながら、ステアリングを切ってもよく曲がる車とするためには、前後輪のコーナリングスティフネス $k_1$ 、 $k_2$ を両方とも大きくした上で $k_1 < k_2$ とすれば、前輪に必要な舵角 $\delta$ を小さくすることができます。

ステアリングの操作量を減らす別の方法としては、ステアリングのギア比を上げ、人の操作量を減らすことで US をごまかす方法もあります。ただし、単にギア比を上げると、ステアリングが重く操作しづらくなってしまいます。これを補うためには、パワーステアリングのモーター出力を大きくする必要がありますが、モーターの重さと大きさ、それを支える支持部品の耐久強度も必要となります。

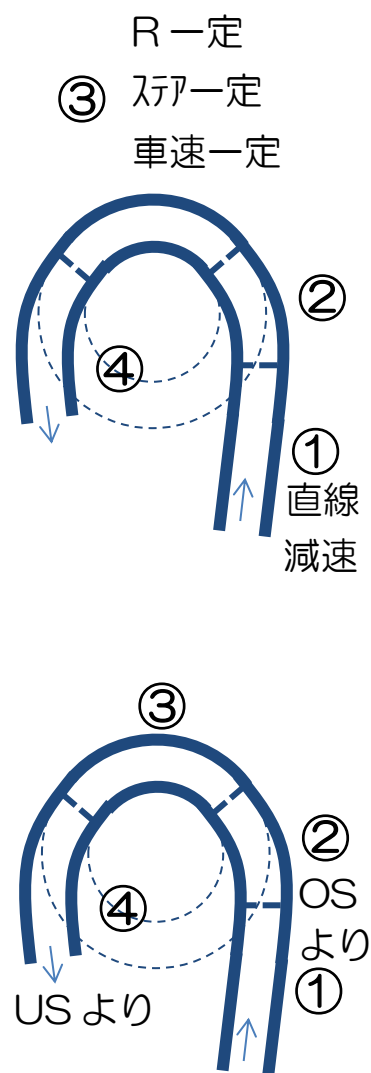
ここで、弱い US の車でコーナーを曲がるときの、車の操作と車の動き方を簡単に整理しておきます。図(欄外)の①はストレート部分、②はコーナー始まりの R 徐変部分、③は R 一定部分、④はコーナーの終わりの R 徐変部分を表しています。

コーナーの曲り方として、①で減速、②でブレーキを戻しつつステアリングを切り始め、③は速度一定、旋回半径一定で走行し、④でステアリングを戻しながらアクセルを徐々に踏み始める、とします。

上の操作を行うと、タイヤの接地荷重の大きさは、①で前輪側が大きくなり、③では旋回円の外側が大きくなる、という状況です。タイヤのコーナーリングステイフネスは接地荷重の大小で増減するため、状況に応じてステア特性は変化します。例えば①の減速中は、前輪のコーナーリングステイフネスが増加し、車の US 特性は弱まった状態です。

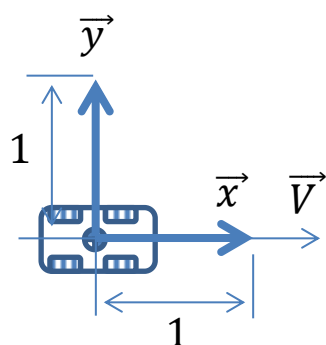
前項で考えたように、③のコーナーを回るためには、前輪と後輪でコーナーリングフォースが必要です。後輪のコーナーリングフォースは、車の回転角 $\theta$ によって発生するため、②で車が素早く回転することがポイントになります。従って、②のコーナーの入り口で車が減速中であれば、前輪のコーナーリングフォースを大きくし、車を素早く回転させることができます。このとき、後輪のコーナーリングステイフネスが小さいほど、必要な車の回転角が大きくなるため、車が曲がりにくく感じます。

③のコーナーリング中のブレーキ操作は基本的には NG です。前輪の摩擦円に余裕があるときは、OS が強くなりスピンする可能性があります。摩擦円に余裕がないときは、タイヤがロックし、前輪の横力がゼロになりコーナーの外側に車のはみ出します。どうしても、というときは、カウンターステアでスピンを止めるか、摩擦円を超えないようにステアリングを戻してブレーキを行う必要があります。



## 2.4.4.運動方程式の変換と遠心力 その1

車に働く遠心力は、見かけの力、と呼ばれます。なぜ、見かけの力なのか？ それは、運動方程式の座標系を変換してはじめて現れる物理量だからです。



準備として、速度ベクトルの微分を考えます。図(欄外)のように $x$ 軸方向に速度 $V$ で進む車の速度ベクトル $\vec{V}$ は、 $x$ 軸、 $y$ 軸方向の単位ベクトルを $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ と定義すれば

$$\vec{V} = V\vec{x} \quad (2.130)$$

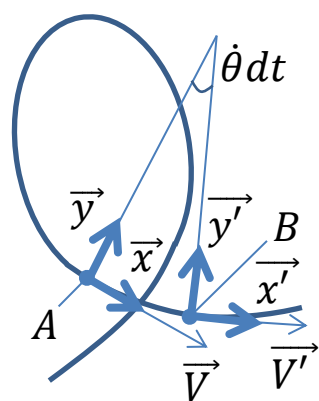
と表すことができます。ここで、上式に積の微分公式を適用すれば、加速度ベクトル $d\vec{V}/dt$ の一般式として

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{x} + V\frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.131)$$

が得られます。さて、ここで上式第2項 $d\vec{x}/dt$ は $dt$ 当たりの座標系の単位ベクトルの変化量です。例えば、座標系を変更する必要がなければ $d\vec{x}/dt = 0$ を上式に代入し

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{x} \quad (2.132)$$

となります。上式と式(2.130)を比較すると、単に速度の大きさ $V$ を微分しただけに見えますが、ここで強調したいことは、式(2.131)で「座標系を変えない」という条件を与えた結果であることです。



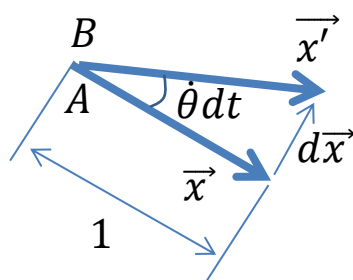
上記の速度ベクトルの微分の手順に従えば、図(欄外)のように自由な曲線上を進む車の進行方向に座標系を固定した運動方程式を記述することができます。

図(欄外)の点 $A$ の微小時間 $dt$ 後の位置を点 $B$ とし、点 $A$ の座標系の単位ベクトルを $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 、点 $B$ の座標系の単位ベクトルを $\vec{x}'$ 、 $\vec{y}'$ とします。微小時間 $dt$ での、座標軸 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ の変化量を $d\vec{x}$ 、 $d\vec{y}$ と置き、図(欄外)のように原点をそろえて $\vec{x}$ 、 $\vec{x}'$ 、 $\vec{y}$ 、 $\vec{y}'$ を書き表せば

$$\vec{x}' = \vec{x} + d\vec{x} \quad (2.133)$$

の関係が成り立ちます。また、速度ベクトルの回転角速度を $\dot{\theta}$ とすれば、幾何学的な関係から

$$|d\vec{x}| = \dot{\theta} dt \quad (2.134)$$



となります。また、その方向は、 $\dot{\theta}dt$ が微小である場合には、 $\vec{y}$ に等しいと考えることができます。従って

$$d\vec{x} = \dot{\theta}dt\vec{y} \quad (2.135)$$

上式を式(2.131)に代入すれば

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{x} + V\dot{\theta}\vec{y} \quad (2.136)$$

となります。ここで、剛体の運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.137)$$

に式(2.136)を代入し、外力ベクトル $\vec{F} = F_x\vec{x} + F_y\vec{y}$ と置き換えれば

$$F_x\vec{x} + F_y\vec{y} = m\frac{dV}{dt}\vec{x} + mV\dot{\theta}\vec{y} \quad (2.138)$$

となります。ここで、上式を $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 方向に分けて表せば

$$F_x = m\frac{dV}{dt} \quad (2.139)$$

$$F_y = mV\dot{\theta} = mV\frac{d\theta}{dt} \quad (2.140)$$

となります。上式を車の運動に当てはめると、駆動力 $F_x$ 、タイヤの横力 $F_y$ によって、車の速度と向きが変わることを示しています。

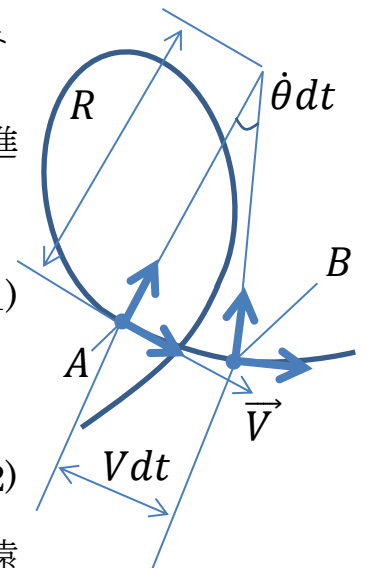
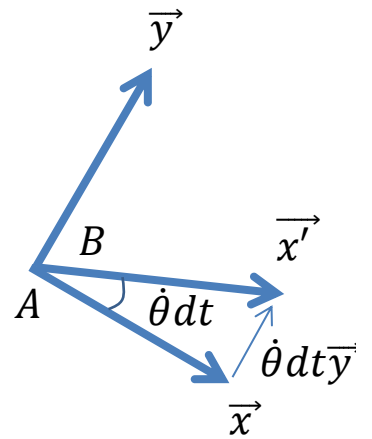
それでは上式から、車に働く遠心力について考えてみます。図(欄外)のように、車が速度 $V$ 一定 ( $dV/dt = 0$ )、回転角速度 $\dot{\theta}$ で進んでいるとき、その微小時間 $dt$ の間に進む距離 $Vdt$ との間には

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}dt &= Vdt \\ \therefore \dot{\theta} &= \frac{V}{R} \end{aligned} \quad (2.141)$$

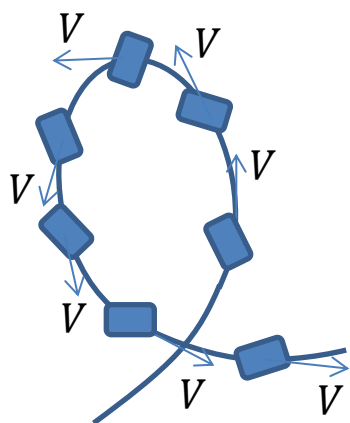
の関係があります。上式を式(2.140)に代入すれば

$$F_y = m\frac{V^2}{R} \quad (2.142)$$

となります。上式より、「車の進路 $\theta$ が変化するとき、遠心力が発生し、それに抵抗するためのタイヤの横力 $F_y$ が必要になる」、あるいは、「タイヤの横力 $F_y$ で車の進路 $\theta$ を変える時、それに応じた遠心力がつりあいの関係となる」と考えることができます。



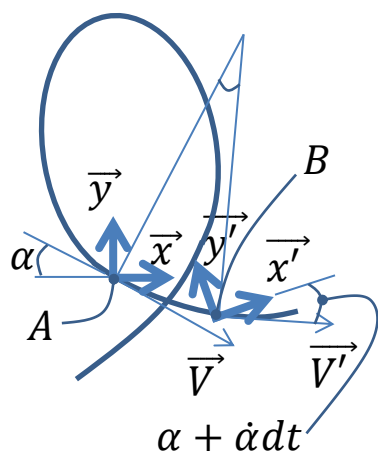




### 2.4.5.運動方程式の変換と遠心力 その2

先に述べたように、車がコーナーを曲がるために必要な後輪のコーナーリングフォースを得るためには、図(欄外)のように車が旋回円の内側を向く必要があります。

従って旋回中は、車の進行方向(速度ベクトル)  $\vec{V}$  と車の向きが異なるため、車の横力や駆動力も進行方向と異なる向きに発生します。このような状況では、車の向きに固定された座標系がなにかと便利です。この項では、前項と同様の手順で、車の向き(車の進行方向でなく)に固定した座標系の運動方程式を考えます。



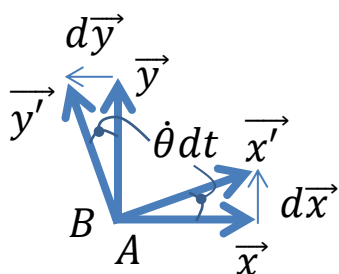
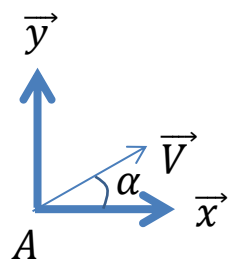
ここで、図(欄外)の点Aの微小時間 $dt$ 後の位置を点Bとし、点Aの座標系の単位ベクトルを $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ 、点Bの座標系の単位ベクトルを $\vec{x}'$ 、 $\vec{y}'$ とします。図(欄外)の点Aにおいて、角度 $\alpha$ 方向( $\vec{x}$ 、 $\vec{x}'$ を基準に、左回りを正)に速度 $V$ で進む車の速度ベクトル $\vec{V}$ は単位ベクトル $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ を用いて

$$\vec{V} = V \cos \alpha \vec{x} + V \sin \alpha \vec{y} \quad (2.143)$$

と表すことができます(欄外上の図では、 $\alpha$ は負の値をとります)。ここで、上式に積の微分公式を適用すれば、加速度ベクトル $d\vec{V}/dt$ の一般式として

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & \frac{dV}{dt} \cos \alpha \vec{x} - V \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha \vec{x} + V \cos \alpha \frac{d\vec{x}}{dt} \\ & + \frac{dV}{dt} \sin \alpha \vec{y} + V \frac{d\alpha}{dt} \cos \alpha \vec{y} + V \sin \alpha \frac{d\vec{y}}{dt} \end{aligned} \quad (2.144)$$

が得られます。



さて、上式の $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ の微分項は微小時間 $dt$ での、座標軸 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ の変化量です。従って、図(欄外)のように点Aと点Bをそろえて $\vec{x}$ 、 $\vec{x}'$ 、 $\vec{y}$ 、 $\vec{y}'$ を書き表せば

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} + d\vec{x} \\ \vec{y}' &= \vec{y} + d\vec{y} \end{aligned} \quad (2.145)$$

の関係が成り立ちます。また、車の回転角速度を $\dot{\theta}$ とすれば、図(欄外)の幾何学的な関係から

$$1 \cdot \dot{\theta} dt = |d\vec{x}| = |d\vec{y}| \quad (2.146)$$

となります。また、その方向は、 $\dot{\theta} dt$ が微小である場合には、 $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$ に等しいと考えることができるため

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \dot{\theta} dt \vec{y} \\ d\vec{y} &= -\dot{\theta} dt \vec{x} \end{aligned} \quad (2.147)$$

と表されます。上式を式(2.144)に代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dV}{dt} \cos \alpha \vec{x} - V \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha \vec{x} + V \cos \alpha \frac{\dot{\theta} dt}{dt} \vec{y} \\ &\quad + \frac{dV}{dt} \sin \alpha \vec{y} + V \frac{d\alpha}{dt} \cos \alpha \vec{y} + V \sin \alpha \frac{\dot{\theta} dt}{dt} \vec{x} \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \left\{ \frac{dV}{dt} \cos \alpha - V \sin \alpha \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right\} \vec{x} \\ &\quad + \left\{ \frac{dV}{dt} \sin \alpha + V \cos \alpha \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right\} \vec{y} \end{aligned}$$

となります。ここで、剛体の運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.149)$$

に式(2.148)を代入し、外力ベクトル  $\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y}$  と置き換えれば

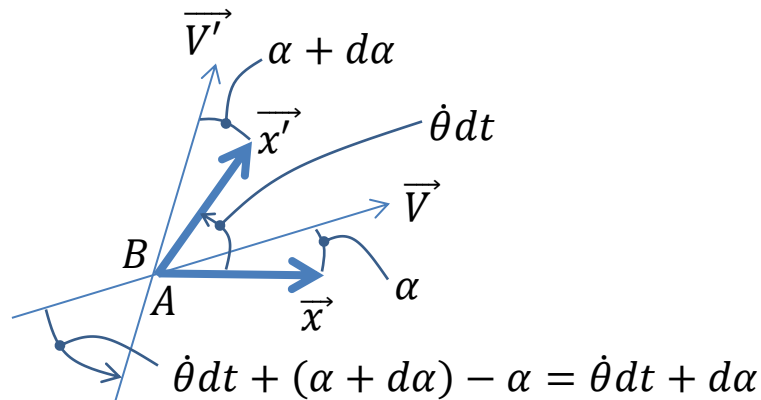
$$\begin{aligned} F_x \vec{x} + F_y \vec{y} &= m \left\{ \frac{dV}{dt} \cos \alpha - V \sin \alpha \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right\} \vec{x} \\ &\quad + m \left\{ \frac{dV}{dt} \sin \alpha + V \cos \alpha \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \right\} \vec{y} \end{aligned} \quad (2.150)$$

となります。上式を  $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$  方向に分けて表せば

$$F_x = m \frac{dV}{dt} \cos \alpha - mV \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \sin \alpha \quad (2.151)$$

$$F_y = m \frac{dV}{dt} \sin \alpha + mV \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \cos \alpha \quad (2.152)$$

となります。ここで、上式の右辺の第1項は車の速度方向の慣性力、第2項は遠心力です。前項で考えたように、遠心力は車の回転角速度に応じて働く慣性力です。上式の座標系の場合、微小時間  $dt$  当たりの速度ベクトル  $\vec{V}$  の変位角は図(欄外下)の関係から  $\dot{\theta} dt + d\alpha$  です。従って、角速度は  $(\dot{\theta} dt + d\alpha)/dt = \dot{\theta} + d\alpha/dt$  となり、上式の第2項の括弧に一致します。



### 2.4.6.車基準の車の運動方程式

一般によく用いられる、車基準の運動方程式を導出します。車のスリップアングル $\alpha$ が小さい場合に限定すれば、式(2.151)、(2.152)に $\cos \alpha = 1$ 、 $\sin \alpha = \alpha$ を代入し

$$F_x = m \frac{dV}{dt} - mV \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \alpha \quad (2.153)$$

$$F_y = m \frac{dV}{dt} \alpha + mV \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \quad (2.154)$$

となります。ここで上式を簡略化するために、車の速度 $V$ が一定になる条件を与えます。車の速度を一定に保つために必要な駆動力 $F_x$ は、式(2.153)に $dV/dt = 0$ を代入し

$$F_x = -mV \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \alpha \quad (2.155)$$

となります。常に上式の駆動力 $F_x$ を車に与えるならば、速度は一定に保たれ $dV/dt = 0$ です。従って式(2.154)は

$$F_y = mV \left( \dot{\theta} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \quad (2.156)$$

と簡略化されます。

ここで、前輪のコーナーリングフォースを $2Y_1$ 、後輪のコーナーリングフォースを $2Y_2$ と定義し、式(2.156)に

$F_y = 2Y_1 + 2Y_2$ を代入すれば、車の横方向の運動方程式は

$$mV(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) = 2Y_1 + 2Y_2 \quad (2.157)$$

となります。一方、車の回転方向の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = 2Y_1 l_1 - 2Y_2 l_2 \quad (2.158)$$

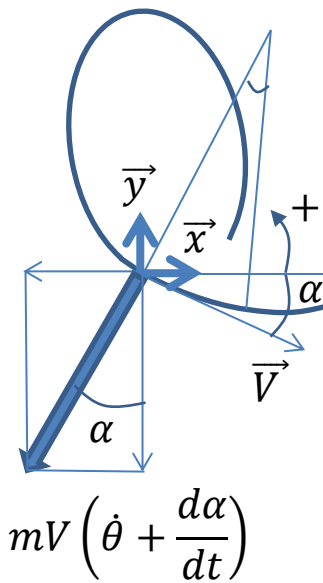
となります。

ここで前後輪のスリップアングル $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、コーナーリングステイフネス $k_1$ 、 $k_2$ を用いて、 $Y_1 = k_1 \beta_1$ 、 $Y_2 = k_2 \beta_2$ と定義すれば、式(2.157)、(2.158)は

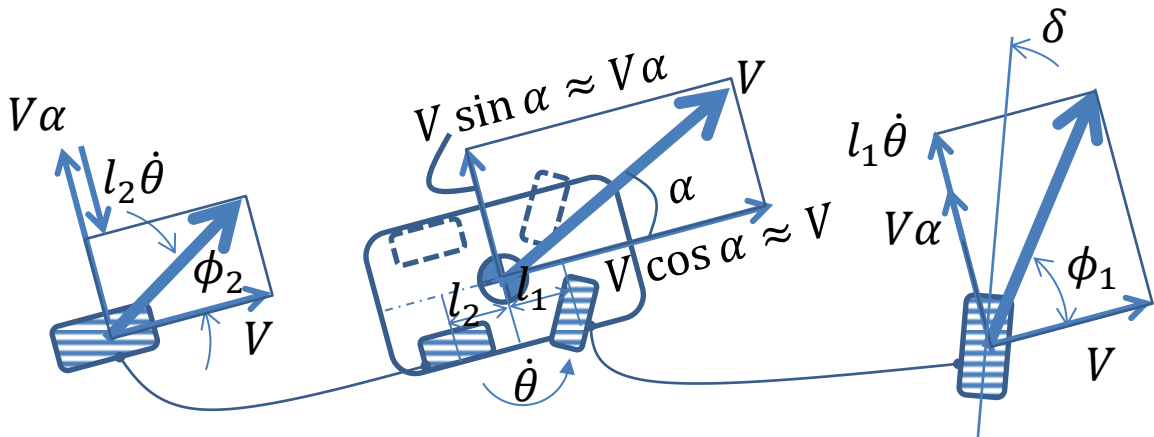
$$mV(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) = 2k_1 \beta_1 + 2k_2 \beta_2 \quad (2.159)$$

$$I\ddot{\theta} = 2k_1 \beta_1 l_1 - 2k_2 \beta_2 l_2 \quad (2.160)$$

とあらわされます。



さらに、スリップアングル $\beta_1$ 、 $\beta_2$ は下図(欄外)の前後輪位置での車の進行方向 $\phi_1$ 、 $\phi_2$ と、前輪の舵角 $\delta$ を用いて



$$\beta_1 = \delta - \phi_1 \approx \delta - \frac{V\alpha + l_1\dot{\theta}}{V} \quad (2.161)$$

$$\beta_2 = 0 - \phi_2 \approx -\frac{V\alpha - l_2\dot{\theta}}{V}$$

と表されます。上式を式(2.159)、(2.160)に代入すれば

$$mV(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) = 2k_1 \left( \delta - \frac{V\alpha + l_1\dot{\theta}}{V} \right) + 2k_2 \left( -\frac{V\alpha - l_2\dot{\theta}}{V} \right) \quad (2.162)$$

$$I\ddot{\theta} = 2k_1 \left( \delta - \frac{V\alpha + l_1\dot{\theta}}{V} \right) l_1 - 2k_2 \left( -\frac{V\alpha - l_2\dot{\theta}}{V} \right) l_2 \quad (2.163)$$

となります。

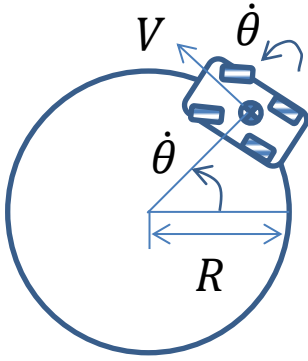
上式を $\alpha$ 、 $\dot{\theta}$ で整理し行列の形で表せば、車基準の運動方程式は次のように表されます。

$$\begin{bmatrix} mV & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(k_1 + k_2) & mV + \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ 2(k_1 l_1 - k_2 l_2) & \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 \delta \\ 2k_1 l_1 \delta \end{Bmatrix} \quad (2.164)$$

自動車物理ノートでは単位の統一を優先し、重心のスリップアングルと車の向きを $\alpha$ 、 $\theta$ と置いて式(2.164)の導出を行いました。一方多くの文献では、重心の横すべり角 $\beta$ 、ヨー角速度（ヨーレート yaw rate） $r$ を用いて、次のように表されます。

$$\begin{bmatrix} mV & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(k_1 + k_2) & mV + \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ 2(k_1 l_1 - k_2 l_2) & \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 \delta \\ 2k_1 l_1 \delta \end{Bmatrix} \quad (2.165)$$

### 2.4.7.車基準の車の運動方程式 定常円旋回



車基準の運動方程式から、定常円旋回時の旋回半径 $R$ と前輪に必要な舵角 $\delta$ の関係を確認します。

図(欄外)のように、定常円旋回中は車の自転の角速度 $\dot{\theta}$ が公転の角速度が一致していることから

$$V = R\dot{\theta} \quad (2.166)$$

の関係があります。また、角速度 $\dot{\theta}$ 一定、車のスリップアングル $\alpha$ 一定のため、 $\ddot{\theta} = 0$ 、 $\dot{\alpha} = 0$ 、 $\dot{\theta} = V/R$ を式(2.164)に代入し

$$\begin{bmatrix} 2(k_1 + k_2) & mV + \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ 2(k_1 l_1 - k_2 l_2) & \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ V/R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 \delta \\ 2l_1 k_1 \delta \end{Bmatrix} \quad (2.167)$$

となります。逆行列を使って上式を解けば

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ V/R \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} & -mV - \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ -2(k_1 l_1 - k_2 l_2) & 2(k_1 + k_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2k_1 \delta \\ 2l_1 k_1 \delta \end{Bmatrix} \quad (2.168)$$

となります。ここで、上式の $\det A$ は式(2.167)の左辺より

$$\begin{aligned} \det A &= 2(k_1 + k_2) \cdot \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} - \left\{ mV + \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \right\} \cdot 2(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ &= \frac{4k_1 k_2 l_1^2 + 4k_1 k_2 l_2^2 + 8l_1 l_2 k_1 k_2}{V} - 2mV(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ &= \frac{4k_1 k_2}{V} (l_1 + l_2)^2 - 2mV(k_1 l_1 - k_2 l_2) \end{aligned} \quad (2.169)$$

と表されます。ここで、式(2.168)の2行目の式に着目すれば

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} &= \frac{-2(k_1 l_1 - k_2 l_2)2k_1 \delta + 2(k_1 + k_2)2l_1 k_1 \delta}{\det A} \\ &= \frac{4k_1 k_2 (l_1 + l_2) \delta}{\frac{4k_1 k_2}{V} (l_1 + l_2)^2 - 2mV(k_1 l_1 - k_2 l_2)} \\ &= \frac{V \delta}{l_1 + l_2} \frac{1}{1 - \frac{m(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{2k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2} V^2} \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\therefore R = \left\{ 1 - \frac{m(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{2k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2} V^2 \right\} \cdot \frac{l_1 + l_2}{\delta} \quad (2.171)$$

となります。上式を図(欄外)に示すと、例えば、 $k_2 l_2 - k_1 l_1 = 0$  (NS)の場合、速度 $V$ に関わらず旋回半径は $R = (l_1 + l_2)/\delta$ 一定となります。また、 $k_2 l_2 - k_1 l_1 > 0$  (US)の場合、速度 $V$ が大きいほど旋回半径 $R$ は大きくなります。一方、 $k_2 l_2 - k_1 l_1 < 0$  (OS)の場合、速度 $V$ が大きいほど旋回半径 $R$ は小さくなり、速度 $V$ が

$$1 - \frac{m(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{2k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2} V^2 = 0 \quad (2.172)$$

となる条件で $R = 0$ となり、車はスピンします。

上式より第2項の $V^2$ の係数が大きいほど、低い速度 $V$ でスピン状態となることから、一般にこの係数をスタビリティファクタ $A$

$$A = -\frac{m(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{2k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2} \quad (2.173)$$

と定義します。上式より、 $A = 0$ でNS特性、 $A > 0$ でUS特性、 $A < 0$ でOS特性を表し、OS特性が強いほどスピン状態に陥る( $R = 0$ となる)速度 $V$ は小さくなります。この速度は終端速度 $V_c$ と呼ばれ、式(2.172)に、上式と $V = V_c$ を代入し

$$1 + AV_c^2 = 0$$

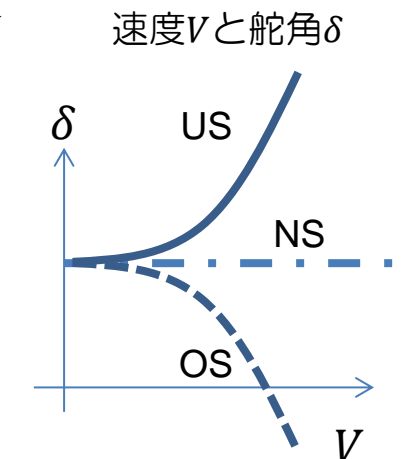
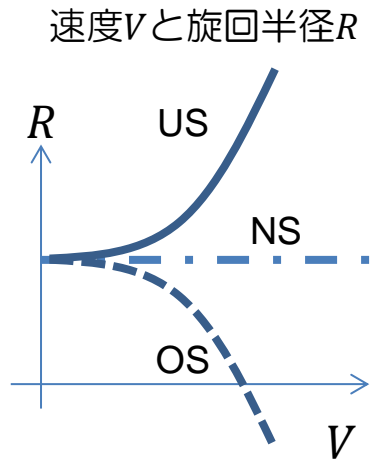
$$V_c = \sqrt{-\frac{1}{A}} \quad (2.174)$$

と表されます。上式より、スタビリティファクタ $A$ が大きな負の値(前輪側の特性 $k_1 l_1$ が大)になるほど、スピン状態に陥る終端速度 $V_c$ は小さくなります。

最後に、車速 $V$ で半径 $R$ の旋回を行うために必要な前輪の舵角 $\delta$ を式(2.171)の $R$ と $\delta$ を入れ替えて示します。

$$\delta = \left\{ 1 - \frac{m(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{2k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2} V^2 \right\} \cdot \frac{l_1 + l_2}{R} \quad (2.175)$$

上式を図(欄外)に示すと、USの車は速度が上がるほど必要な舵角 $\delta$ が大きくなることがわかります。また、OSの車では、終端速度 $V_c$ 以上でステアリングを旋回方向と逆側に操作するカウンターステアの操作が必要になることを示しています。



## 2.5. 曲がる 横力発生時のステア特性変化

サスペンション部品はゴムで支持されているため、ゴムが撓む（コンプライアンス）ことで上下方向以外にもわずかに動くことができます。この性質を積極的に利用し、旋回時のコーナーリングフォースを利用してタイヤの向きを変え、スリップアングルを増減させることを横力コンプライアンスステアと呼びます。

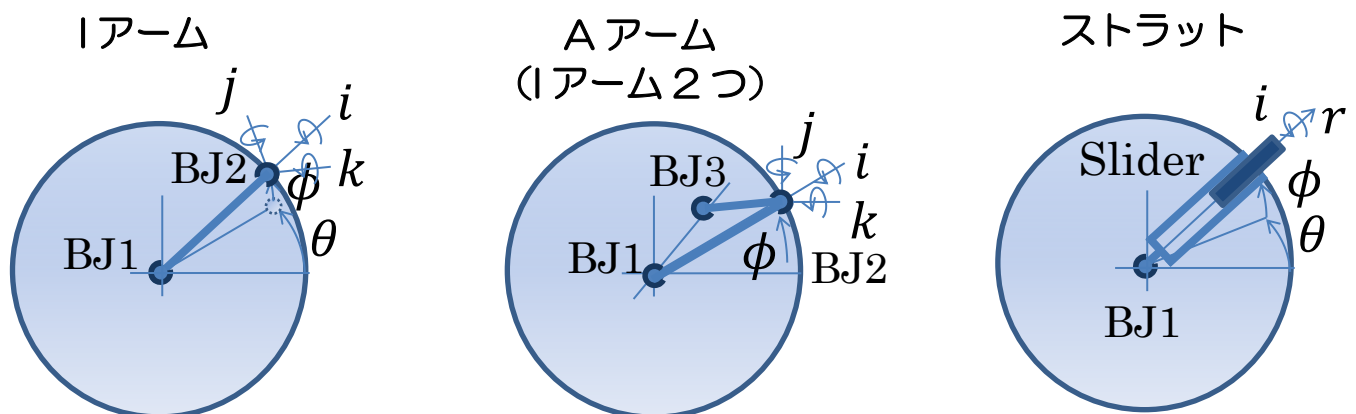
### 2.5.1. リンク機構と自由度

サスペンションを構成する I アーム、A アーム、ストラット（Strut=支柱）のリンク機構の自由度について考えます。

図(欄外)の1つ目の I アームは、両端にボールジョイントが付いた構造と考えることができます。BJ2 は BJ1 を中心とした球面上のどこにでも動けることから、2つの回転自由度  $\theta$ 、 $\phi$  を持ちます。また、BJ2 位置での3軸方向の回転  $i$ 、 $j$ 、 $k$  の自由度を持つため、5自由度フリー、1自由度拘束の部品です。

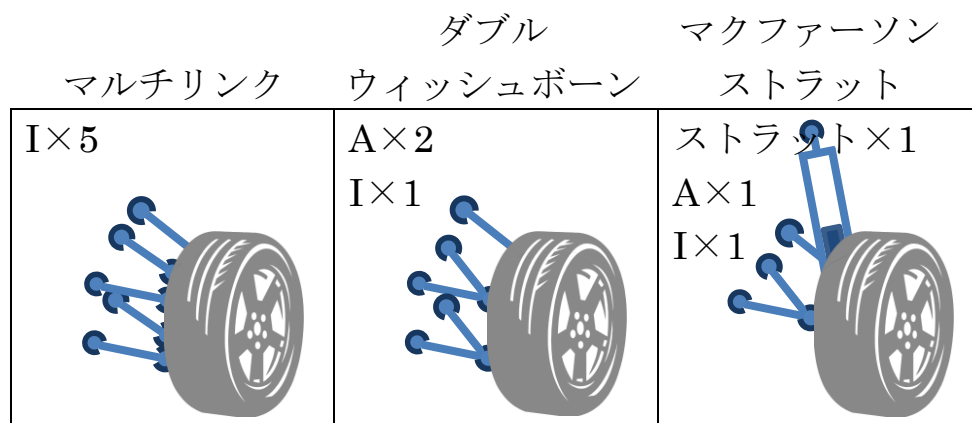
図(欄外)の2つ目の A アームは、I アームを2つ組み合わせた部品と考えることができます。2本目の I アームによって回転自由度  $\theta$  も拘束されるため、4自由度フリー、2自由度拘束の部品です。

図(欄外)の3つ目のストラット（Strut=支柱）は、片側ボールジョイント、もう一方が筒の中の円柱のような構造と考えることができます。円柱の回転方向  $j$ 、 $k$  が拘束されるため、4自由度フリー、2自由度拘束の部品です。

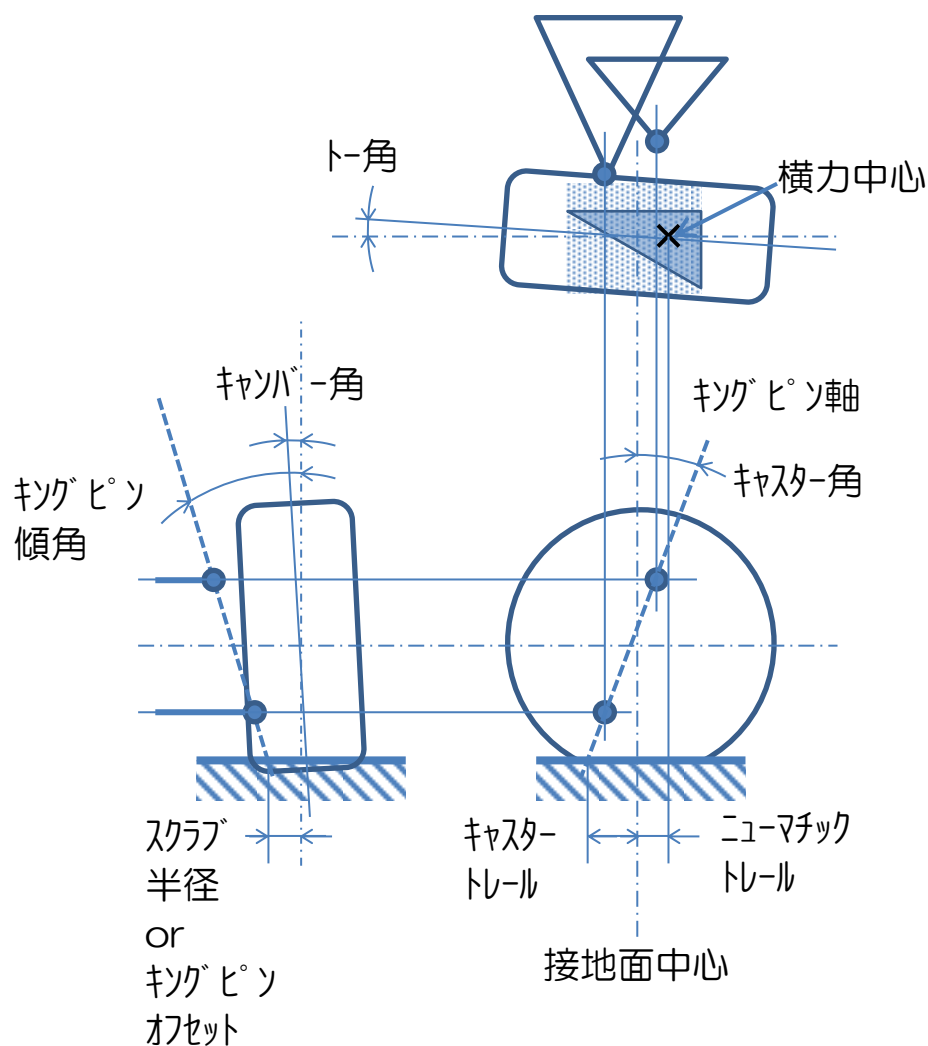


## 2.5.2.サスペンションの専門用語

サスペンションは、基本的に上下方向のみに動くように構成されたリンク機構です。Iアーム、Aアーム、ストラット（Strut=支柱）を組み合わせ、拘束自由度の合計を5にすることで、上下方向に動くリンク機構を構成しています。代表的なサスペンションとして



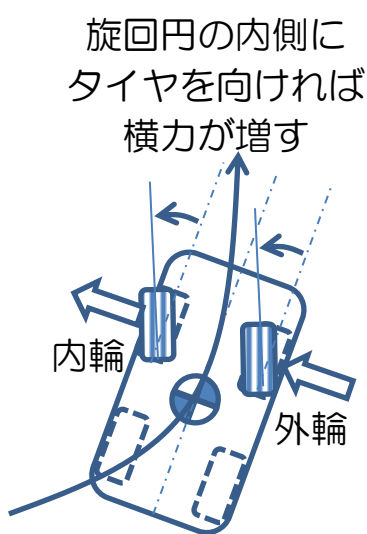
があります。サスペンション特有の寸法の呼び方をダブルウィッシュボーン形式を例に下図に示します。





### 2.5.3.横力コンプライアンスステアとトー角変化

前節までに見てきたように、車の直進性や操作性を確保するためには、車を弱いUS特性に設定する必要があります。この節ではその手段のひとつとして、コーナーリングフォースが働いたときに、ゴムの撓み（コンプライアンス）を利用し、タイヤのトー角を変化させ、タイヤのコーナーリングスフォースを増減する方法である、横力トーイン、横力トーアウトについて整理したいと思います。



始めに、よく使われる専門用語「トーイン、トーアウト」について整理したいと思います。まず、旋回中にタイヤのコーナーリングフォースを増やすタイヤの向きを考えます。4つのタイヤはいずれも旋回円の内側に向ければ、タイヤのスリップアングルが増え、コーナーリングフォースが増す方向です。この状況を、車の中のドライバーを基準に表現すると

#### 表現1

- ・外輪は車の内側に向ける（外輪トーイン）
- ・内輪は車の外側に向ける（内輪トーアウト）

と言い表されます。さらに、ドライバーから見たタイヤに働くコーナーリングフォースの向きを書き加えると

#### 表現2

- ・外輪は車両内向きの横力でトーイン
- ・内輪は車両外向きの横力でトーアウト

となります。ここで、上記の言葉を言い換えると

#### 表現3

内外輪ともに、車両内向きの横力でトーイン

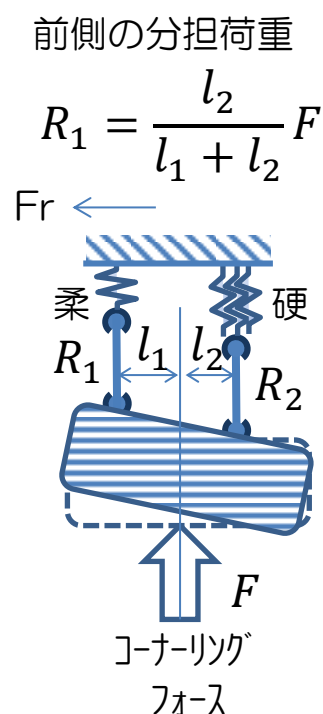
となります。この表現3の状況から、タイヤのコーナーリングフォースを増やす方向を、「横力トーイン」、減らす方向を「横力トーアウト」と言います。

### 2.5.4.後輪の横力コンプライアンスステア

後輪を「横力トーイン」に設定すれば、後輪のコーナリングフォースが増加するため、車のステア特性を US 特性とすることができます。タイヤを上から見た時、図(欄外)のように前側のアームを柔らかいゴムで支持すれば横力トーインにできます。

図(欄外)のような位置関係で、横方向の力 $F$ が入力された場合、前後の分担荷重は距離 $l_1$ 、 $l_2$ の逆比になるため、入力点に近い支持点が荷重をたくさん受け持ちます。

例えば、入力点の真横に後側のアームを配置すると、前側のアームの分担荷重は0になるため、ゴムの硬さに関わらず、常に横力トーアウトとなってしまいます。ゴムの硬さだけでなく、アームの配置も重要です。

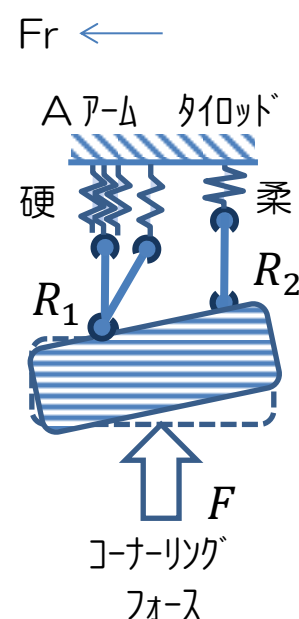


### 2.5.5.前輪の横力コンプライアンスステア

前輪を「横力トーアウト」に設定すれば、前輪のコーナリングフォースが減少するため、車のステア特性を US 特性とすることができます。タイヤを上から見た時、図(欄外)のように後側のアームを柔らかいゴムで支持すれば横力トーアウトにできます。

例えば、前輪駆動車の Fr サスペンションでよく用いられるストラット(Strut=支柱)形式の場合、前後の2本のアームに相当するのは、タイヤ前側についての A アームとステアリングにつながるタイロッドです。

まず、A アームとタイロッドの分担荷重は、タイヤ側の A アームとタイロッドの接続点の位置関係から前項同様に決まります。さらに、A アームの分担荷重は2本の足で分担されます。図(欄外)のように、もし A アームの前側の足が真横に配置されれば、A アームの荷重は前側の足だけで受け持つため、A アームのばね定数は前側の足のばね定数だけで決まります。一方、タイロッドのばね定数は、ステアリング軸のねじり剛性やギアボックスの支持剛性などの直列ばね要素で決まります。



## 2.6. 曲がる 接地荷重変化時のステア特性変化

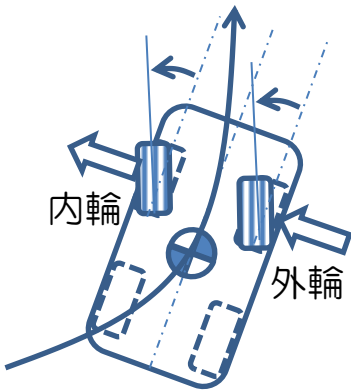
コーナーリング中は、遠心力によるロールモーメントにより旋回円の内側のタイヤ（内輪）は接地荷重が減少し、外側のタイヤ（外輪）は増加します。この現象を左右輪の荷重移動と呼びます。



ロールモーメントによって車が傾くほどのコーナーリングでは、サスペンションは上下方向にストロークするため、外輪は車に近づき（バウンド側）、内輪は車から離れ（リバウンド側）ます。このとき、サスペンションのリンク配置によって、タイヤの向きを変化させ、タイヤのコーナーリングフォースを増減させることができます。この節では、サスペンションの上下ストローク時のタイヤの向きについて整理します。

### 2.6.1. ロールステア（トー角変化）

旋回円の内側に  
タイヤを向ければ  
横力が増す



サスペンションのバウンド、リバウンド時のタイヤのトー角変化をロールステアと呼びます。

始めに、よく使われる専門用語「トーイン、トーアウト」について整理したいと思います。まず、旋回中にタイヤのコーナーリングフォースを増やすタイヤの向きを考えます。4つのタイヤはいずれも旋回円の内側に向ければ、タイヤのスリップアングルが増え、コーナーリングフォースが増す方向です。この状況を、車の中のドライバーを基準に表現すると

- ・外輪は車の内側に向ける（外輪トーイン）
- ・内輪は車の外側に向ける（内輪トーアウト）

と言い表されます。この状況を旋回中のサスペンションのバウンド、リバウンドで作出す為には

- ・外輪はバウンドでトーイン
- ・内輪はリバウンドでトーアウト

となる必要があります。また、上記の言葉は

- ・内外輪ともに、バウンドトーイン
- ・内外輪ともに、リバウンドトーアウト

と言い換えることができます。

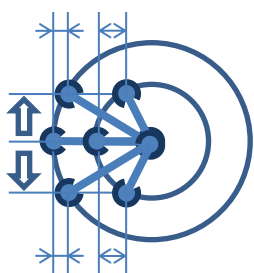
旋回中は、内外輪の荷重移動により、外輪のコーナリングステイフネスが増加するため、外輪のトー角変化の影響が大きくなります。ここでは、外輪をバウンドトーインとするためのサスペンションの動き方を考えます。トーインとは車の内側にタイヤを向けることなので

- バウンドトーインとするためには
- ・前側のアームを車両内側に引き込む
  - ・後ろ側のアームを車両外側に押し出す

必要があります。ここで、Iアームの上下ストローク時の車両左右方向の引き込み量を下図のように考えます。

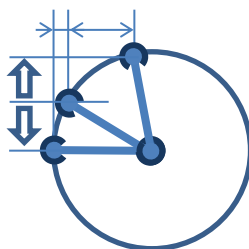
初期角度なしの場合

- ・上下ストロークで引き込む
- ・半径小⇒引き込み量大



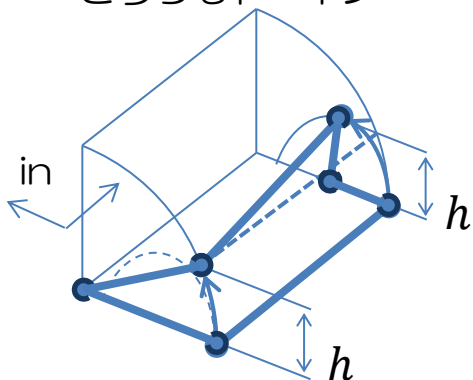
初期角度がある場合

- ・上ストロークで大きく引き込む
- ・下ストロークで少し押し出す

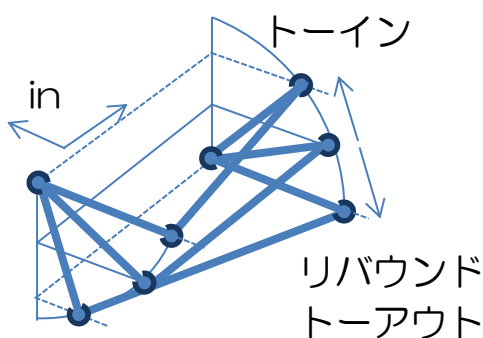


例えば、水平に配置された2本のアームの前側のアームが短い場合（下図の左）、バウンド、リバウンドいずれもトーインとなります。一方、2本のアームに角度をつけて配置すれば、バウンド、リバウンドでトーイン、トーアウトを入れ替えることができます（下図の右）。

バウンド、リバウンド  
どちらもトーイン

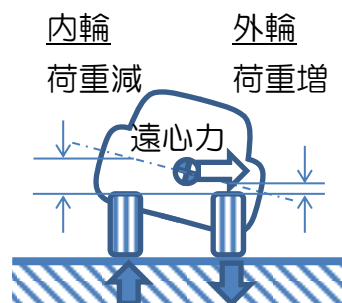


バウンド  
トーイン

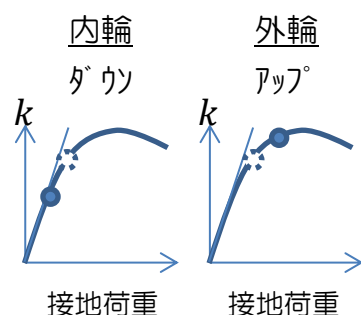


リバウンド  
トーアウト

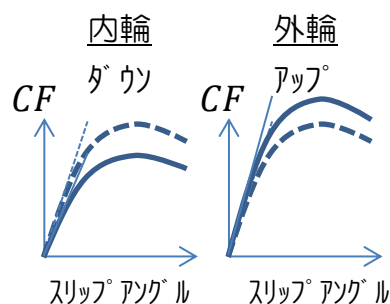
内外輪の荷重移動



コーナリングステイフネス  $k$



コーナリングフォース  $CF$



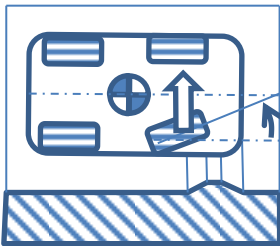
一般的な市販車は、車の直進性や操作性を確保するために弱い US 特性に設定されます。前輪はスリップアングルを減らし、後輪はスリップアングルを増やす必要があるため

車のステア特性を US とするには

- ・前輪のバウンド（外輪）側はトーアウト
- ・前輪のリバウンド（内輪）側はトーイン
- ・後輪のバウンド（外輪）側はトーイン
- ・後輪のリバウンド（内輪）側はトーアウト

に設定する方向です。

路面の凹凸による  
上下ストロークで  
スリップアングル発生



ただし、ロールステアを大きく取りすぎると、直進時に路面の凹凸によって片側のタイヤが上下にストロークした場合に、トー角変化によるコーナーリングフォースが発生し、車の進路が乱されやすくなります。直進性を重視した車では、ロールステアによるトー角変化を小さくし、横力コンプライアンスステアで車の US 特性を確保するという場合もあります。

### 2.6.2. ロールキャンバー（キャンバー角変化）

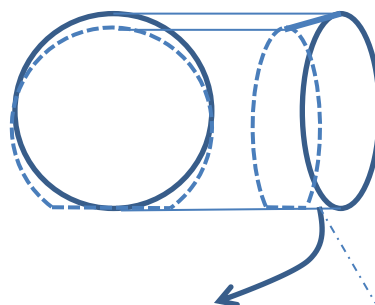
車を正面から見たときの、地面に対するタイヤの角度を対地キャンバー角と呼びます。車両前側から見て、ハの字をネガティブキャンバー、逆ハの字をポジティブキャンバーと呼びます。

対地キャンバー角を持つタイヤが回転する場合、タイヤは傾いた方向に進もうとします。下図のように傾いて変形したタイヤでは、タイヤの両端の円周の長さが異なるため、真っ直ぐ進めないことが分かります。

キャンバー変化  
初タイプ ポジティブ



周の長さの  
短い方へ進む



この状況で強制的に真っ直ぐ進ませた場合、横方向の力が発生します。この力はキャンバースラストと呼ばれ、バイクなどの2輪車はこの力を利用して曲がります。車の場合は、タイヤの偏摩耗や、ロール時のタイヤの接地面積減少によるコーナーリングスティフネス低下を防止するために、対地キャンバー角変化が起きないようにサスペンションのリンクを設定する傾向にあります。

例えば、図(欄外上)のように、車の正面視でみて等長の平行リンクでは、対地キャンバー角変化が起こりますが、上下のリンクの長さや角度を変え、旋回円の外輪側（バウンド側）がハの字（ネガティブキャンバー）、内輪側（リバウンド側）を逆ハの字（ポジティブキャンバー）にすることで接地面積の変化を小さくすることができます。旋回中は内外輪の荷重移動により、外輪側のコーナーリングスティフネスが増加するため、外輪側の接地面積の安定化がより重要になります。

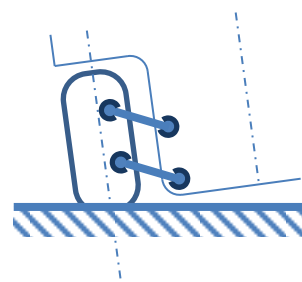
ただし、ロールキャンバーを大きく取りすぎると、直進時に路面の凹凸によって片側のタイヤが上下にストロークした場合に、キャンバー角変化によるキャンバースラストが発生し、車の進路が乱されやすくなります。直進性との両立を考えると、サスペンションのアームを長くしてキャンバー変化を小さくしたり、車のロールそのものを小さくするために、ロール剛性を上げたり、重心を下げるといった考え方もあります。

### 2.6.3.スカッフ変化

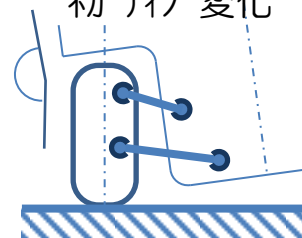
路面の凹凸によってサスペンションが上下にストロークすると、左右輪のタイヤ間の距離（トレッド）が変化します。これをスカッフ変化と呼びます。スカッフ変化が起こると、タイヤのゴムが左右方向に押し縮められるため、横方向の力が発生し車の直進性に影響を与えます。

この影響を小さくするために、サスペンションのアームを長くし、円運動による左右方向変位を小さくすることが一般に行われています。

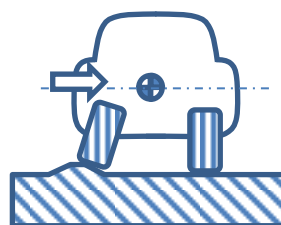
対地キャンバー角変化



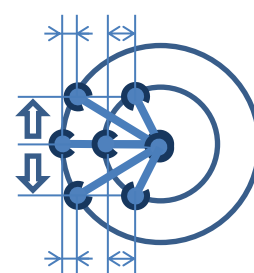
旋回外輪側の  
初ティップ変化



背反は直進時の  
キャンバースラスト発生

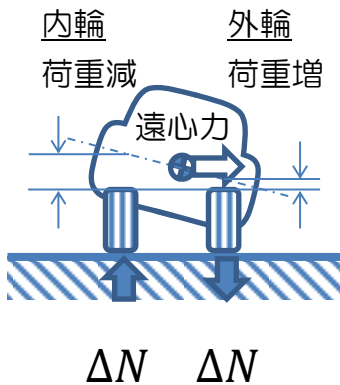


半径が小さいほど  
引き込み量大



### 2.6.4.内外輪の荷重移動とステア特性の変化

#### 内外輪の荷重移動



速度 $v$ 、半径 $r$ の円旋回を行う車の重心には遠心力 $mv^2/r$ と重心高さ $z$ に比例したロールモーメントが働きます。このとき、左右輪の接地荷重はロールモーメントの影響によって増減します。内外輪の幅を $W$ とすると、上下荷重の変化 $\Delta N$ は

$$m \frac{v^2}{r} z = W \Delta N \quad (2.176)$$

$$\Delta N = m \frac{v^2}{r} \cdot \frac{z}{W}$$

となります。内輪の接地荷重は $\Delta N$ 減少し、外輪は $\Delta N$ 増加することから、この現象を内外輪の荷重移動と呼びます。

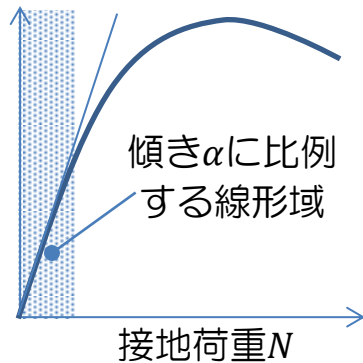
上式の荷重移動 $\Delta N$ は前輪と後輪で分担され、その割合は前後輪のロール剛性とロールセンター高の割合で変化します。ここで、前輪と後輪のロール剛性は、発生するロールモーメントに対し、並列ばねの関係であるため、剛性の高い側の接地荷重変化が大きくなります。

このとき、コーナーリングステイフネスは、接地荷重に対して図(欄外)のような放物線状の特性を持つため、荷重移動が起こると、内外輪のコーナーリングステイフネスの合計値は必ず低くなります。

従って、前輪の荷重移動が大きい場合、車はUS特性が強まります。逆に後輪の荷重移動が大きい場合はOS特性が強まります。

ロール剛性とロールセンター高さについては別の機会に整理したいと思います。

#### 接地荷重とコーナーリングステイフネス $k$



グラハム・ベル

1つのドアが閉まると、別のドアが開く、  
しかし私たちは閉まったドアをずっと見つめ、  
新しいドアがすでに開いていることに気づかない。

## 参考図書

### 宇野高明 「車両運動性能とシャシーメカニズム」

知識ゼロで読み始めましたが、繰り返し読むことで、理解が深まり、徐々に全体が繋がってきたと思います。難しい式は一切なし。

### 原島鮮 「力学Ⅰ－質点・剛体の力学－」

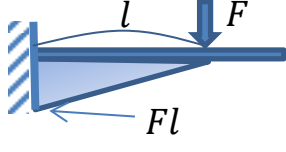
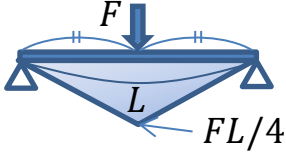
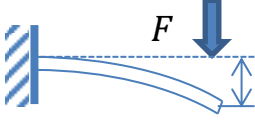
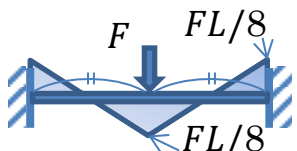
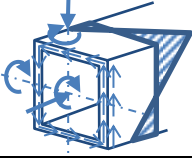
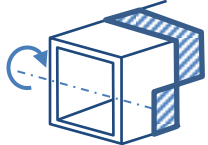
基礎的な教科書ですが、5章の「運動方程式の変換」の内容から、車基準の運動方程式を作ることができます。

この本以外に、「力学」の教科書を読んだことがないので、他との比較はできませんが、物理的思考の基本動作を、分かりやすく厳密に記した名著と思います。





### 3. 強度の式

片持ち梁 	単純支持梁 	梁のたわみ 
不静定梁 	強度	断面の強度判定 
断面の強度判定 	支持部材の耐久	終局耐力 終局荷重

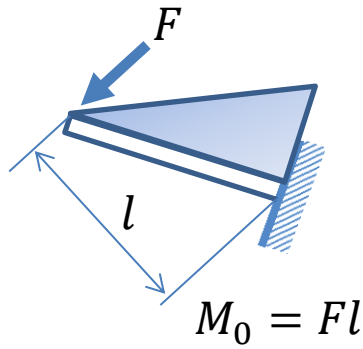
自動車は複雑な構造をしているため、一見すると初歩的な材料力学では何もわからないように思えるかもしれません。

しかし、ジョイント部の接合構造を考えると、よほど固める構造（例えばトラス構造）をとらない限りは、回転自由の単純支持に近いと思います。従って、入力点の曲げモーメントを計算する場合、厳しい条件として単純支持梁とみなすことは妥当であると思います。

また、重要なことは、絶対値が合うことよりも、「入力点の曲げモーメントを減らすために、できるだけ固定端にできないだろうか」とか、「今度の設計変更では、剛性のバランスが変わるから、ここの曲げモーメントが増えそうだ。」という物理感覚が働くことだと思います。

物理ノートでは、梁の曲げモーメントの計算方法や、断面が壊れるかどうかを、梁の曲げモーメントと断面耐力を比較して判定する方法について整理したいと思います。





### 3.1. 片持ち梁

梁の曲げモーメント図の中で、片持ち梁の曲げモーメント図は、最もシンプルで実感として理解できるものです。物理ノートでは、いろいろな梁の曲げモーメントを、できる限り片持ち梁の曲げモーメントに関連付けて整理していきます。

#### 3.1.1. 片持ち梁に荷重 $F$ を加える場合

$$M_0 = Fl \quad (3.1)$$

図（欄外の上2つ）の固定端の曲げモーメント  $M_0$  は、いずれも  $Fl$  です。力  $F$  とその垂直方向の距離  $l$  だけが、固定端の曲げモーメント  $M_0$  を決めています。梁が複雑に曲がっていても、固定端の曲げモーメント  $M_0$  は同じ  $Fl$  です。

なぜでしょうか？ 材料力学では、梁は空間に静止した力のつり合い状態にあります。並進方向の力のつり合いを考えると、両端で逆向きの力  $F$  が発生している必要があります（欄外中）。しかし、これだけでは梁が回転してしまうため、回転を止めるためのモーメント  $Fl$  が必要です。この理屈は梁が複雑に曲がっていても同様です。

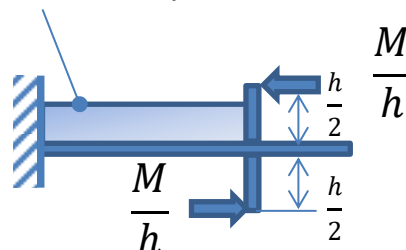
#### 3.1.2. 片持ち梁にモーメント $M$ を加える場合

梁の先端にモーメント  $M$  を加えた場合、梁のすべての断面で曲げモーメントは  $M$  になります。これを理解するために、そもそも梁にモーメントを加える、とはどういうことかを考えます。

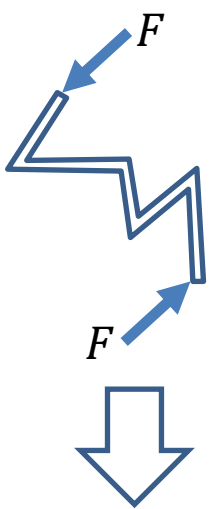
ここでは、モーメントを加えるために下図のように梁の端から長さ  $h$  の剛体を伸ばし、 $M/h$  の偶力を加えます。このとき、梁と荷重  $M/h$  の距離は  $h/2$  であるため、梁の全ての位置で曲げモーメント  $M_0$

$$M_0 = 2 \cdot \frac{M}{h} \cdot \frac{h}{2} = M \quad (3.2)$$

が働きます。

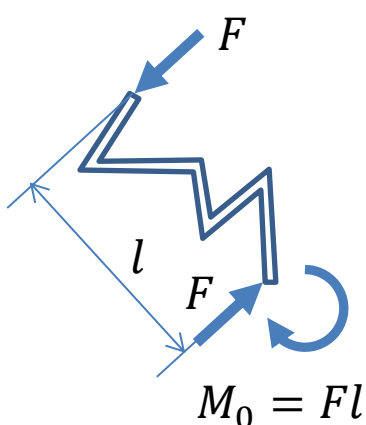


$F$  だけでは回転する



回転を止める

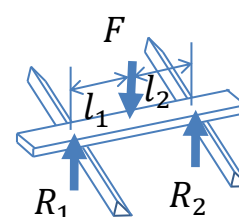
モーメントが必要



## 3.2. 単純支持梁

図(欄外)のように梁を2つの台の上に載せた状態は、支持点の回転を許す支持方法です。このように支持された梁を単純支持梁と呼びます。単純支持梁に働く曲げモーメントは、一度支持点の反力 $R_1$ 、 $R_2$ を求めてから、梁のカット部分に働く荷重を考えることで計算できます。

単純支持梁



### 3.2.1. 単純支持梁に荷重 $F$ が加える場合

始めに支持点の反力 $R_2$ を、図(欄外右上)の左側の支持点周りのモーメントのつり合いから求めます。

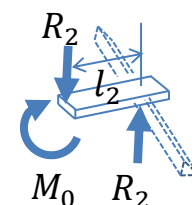
$$Fl_1 = (l_1 + l_2)R_2 \quad (3.3)$$

上式を変形し、右側の支持点の反力 $R_2$ は

$$R_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} F \quad (3.4)$$

と求まります。次に中央部の曲げモーメント $M_0$ を考えます。図(欄外)のように、中央から少し右側をカットし、カット部分に働く力とモーメントのつり合いを考えます。カット部分が回転せずに空間に止まるためには、カット面に曲げモーメント $M_0$

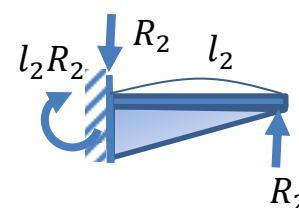
空間に止まるための  
曲げモーメント  
 $M = l_2 R_2$ が必要



$$M_0 = l_2 R_2 = l_2 \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} F \quad (3.5)$$

が働く必要があります。上式の $R_2$ 、 $l_2$ の関係は、図(欄外)のように、カット面を固定端と考えた片持ち梁と同じです。従って、単純支持梁の曲げモーメント分布や変形は、片持ち梁の固定端側を繋ぎ合わせたものと考えることができます。

カット部分の  
端部に働く力は  
片持ち梁と同じ

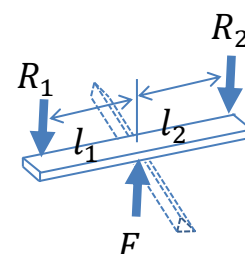


さらに柔軟に考えてみます。荷重点の力 $F$ も支持点の反力 $R_1$ 、 $R_2$ も、梁にとっては外力であるため、支持反力 $R_1$ 、 $R_2$ を入力荷重と考えても同じことです。従って、単純支持梁は図(欄外)のようにシーソーの支点の両側に体重 $R_1$ と $R_2$ の人が乗って、シーソーがつり合っている状態と考えることができます。

力点と支持点を置き換えて考えても同じ

従って、 $R_2$ による中央部の右側のモーメントは

$$M_2 = l_2 R_2 = l_2 \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} F \quad (3.6)$$



同様に、 $R_1$ による中央部の左側のモーメントも

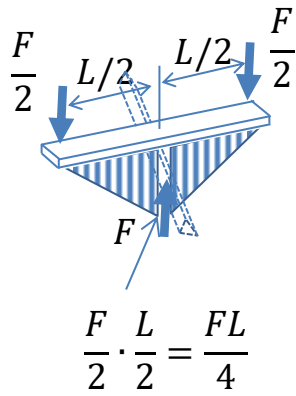
$$M_1 = l_1 R_1 = l_1 \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} F \quad (3.7)$$

であり、左右から同じ大きさの曲げモーメントが加わって、シーソーがつり合った状態と考えることができます。

このシーソーの考え方に違和感がなければ、梁の中央 ( $l_1 = l_2 = L/2$ ) を力  $F$  で押したときの曲げモーメントは直観的に分かります。重さ  $F/2$  の人がシーソーの両側、距離  $L/2$  の位置に乗ってつり合っていると考えればよいので、中央部の曲げモーメント  $M$  は

$$M = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{FL}{4} \quad (3.8)$$

となります。このように考えれば、単純支持梁の中央の曲げモーメント  $FL/4$  を暗記する必要はありません。シーソーをイメージすれば直ちに考え出せます。



### 3.2.2.単純支持梁に荷重 $F/2$ を 2 つ加える場合

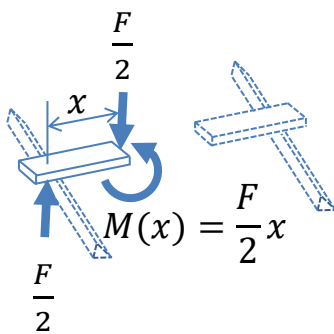
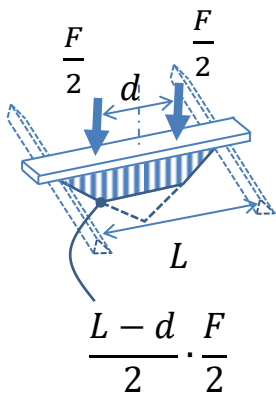
次に、梁の中央から等間隔離れた位置に  $F/2$  ずつ荷重を加える場合を考えます。現実的に梁の中央の 1 点を押すことは稀なので、実際によくある状況です。

左右対称であるため支持点の反力は明らかに  $F/2$  です。曲げモーメントはどうでしょうか？ まず、支持点から荷重点までの曲げモーメントを考えます。支持点から少し内側、距離  $x$  の位置を図(欄外)のようにカットして考えます。カット部分が回転せずに空間に止まるためには

$$M(x) = \frac{F}{2} x \quad (3.9)$$

の曲げモーメントが必要です。上式もカット面を固定端と考えた片持ち梁の曲げモーメントと同じです。従って、支持点から入力点までの曲げモーメントは、前項で求めた中央を 1 点で押した場合の曲げモーメント図(欄外中の図の破線)と重なります。

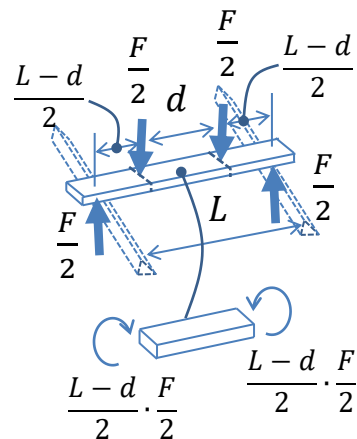
次に中央部の、荷重点から荷重点の間の曲げモーメントを考えます。梁に加わるすべての力を図示すると(次ページ右上)、中央部は  $F/2$  の偶力で両側から曲げられて



いる状況です。梁の両端を両手で持って曲げるイメージです。従って、2つの入力点の間の曲げモーメント $M_0$ は

$$M_0 = \frac{F}{2} \cdot \frac{L-d}{2} = \frac{F(L-d)}{4} \quad (3.10)$$

となります。



### 3.2.3.単純支持梁に荷重を2つ加える場合

図(欄外)のように荷重 $F$ 、 $P$ を加える場合を考えます。支持点の反力は2つの荷重の重ね合わせで表されるため

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{l_2 F}{L} + \frac{x_2 P}{L} \\ R_2 &= \frac{l_1 F}{L} + \frac{x_1 P}{L} \end{aligned} \quad (3.11)$$

です。支持点から入力点までの曲げモーメントを、左側の支持点から少し内側、距離 $x$ の位置をカットして考えます。カット部分が回転せずに空間に止まるためには

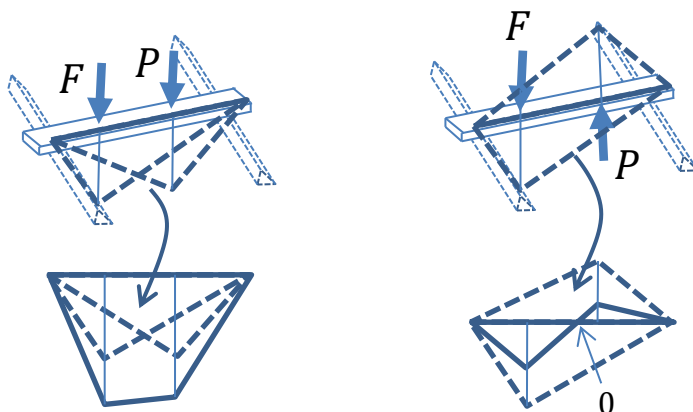
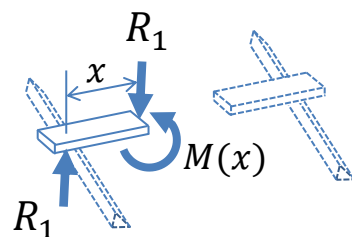
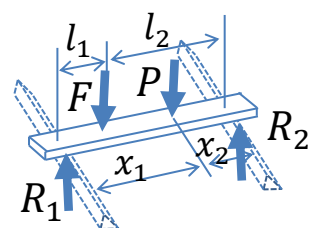
$$M(x) = xR_1 \quad (3.12)$$

の曲げモーメントが必要です。

次に中央部分の曲げモーメントを考えます。梁の曲げモーメントは、下図(左側)のように2つの荷重 $F$ 、 $P$ の曲げモーメントの重ね合わせであることから、入力点間の曲げモーメントは連続的に変化します。従って、中央部分の曲げモーメントは、2つの入力点位置での曲げモーメント

$$\begin{aligned} M_1 &= l_1 R_1 \\ M_2 &= x_2 R_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

を結べばよいこととなります。ここで $M_1$ と $M_2$ の符号が異なる場合は、下図(右側)のように入力点の間に曲げモーメント0となる位置があります。

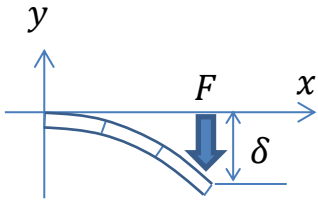
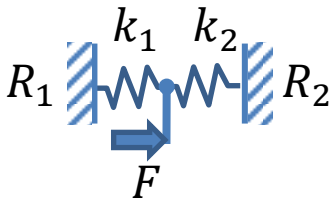
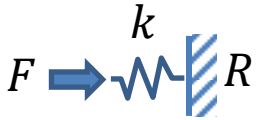


### 3.3. 梁のたわみ

前節の片持ち梁や単純支持梁の曲げモーメントは、梁の変形（以下、たわみ）を考慮せずに、力のつり合いだけで解くことができました。このような梁は静定梁と呼ばれます。

一方、両端固定梁などは、力のつり合いだけでは解けず、梁の剛性を考慮して解く必要があります。このような梁は不静定梁と呼ばれます。

例えば、図(欄外)の $R$ は剛性 $k$ によらず、 $R = F$ となる静定な構造です。一方、 $R_1$ 、 $R_2$ は剛性 $k_1$ 、 $k_2$ 次第で分担荷重が変わる不静定な構造です。ここでは、不静定な構造の特徴として、「力を支える経路が2つ以上あり、剛性の高い方がたくさん力を受け持つ」ことを挙げておきます。

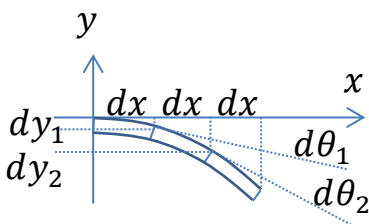


図(欄外)のような片持ち梁の剛性は、 $F/\delta$ と表すことができます。従って、梁のたわみ $\delta$ を考慮すれば、梁の剛性を考慮することができます。梁のたわみの式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3.14)$$

と表されます。

上式の概念を簡単に説明します。前節で計算したように、曲げモーメント $M(x)$ は梁の位置 $x$ によって異なる値をとり、大きな曲げモーメントが働いている部分ほどよく曲がります。そこで、図(欄外)のように、梁を細かい区間 $dx$ に区切り、その区間に働く曲げモーメントによって曲げられた、区間ごとの変位角 $d\theta$ によって生じる $y$ 方向変位 $dy$ を積み上げ、梁のたわみ $y$ を求めることができます。



この節でははじめに梁のたわみの式(3.14)の成り立ちを整理し、片持ち梁のたわみを計算したいと思います。

### 3.3.1. 梁のたわみの式

始めに、梁の微小長さ $dx$ の区間が、微小角 $d\theta$ 曲げられたときの断面のひずみ $\varepsilon$ を考えます。図(欄外)のように、上面の圧縮部分は線長が縮み、下面の引張部分は線長が伸びていることから、上面には圧縮応力、下面には引張り応力が働きます。また、その間に線長が変わらない高さがあり、これを断面の中立面と呼びます。不思議に思われますが、中立面は図(欄外)のように曲がっていても、働く応力は0になります。

図(欄外)のように、変形後の中立面の曲率半径を $R$ とすると、位置 $R + y$ の変形後の線長は

$$(R + y)d\theta \quad (3.15)$$

と表されます。ここで、ひずみ $\varepsilon$ は元の線長 $dx$ に対する変化代の比と定義されるため、位置 $R + y$ でのひずみ $\varepsilon(y)$ は

$$\varepsilon(y) = \frac{(R + y)d\theta - dx}{dx} = \frac{Rd\theta + yd\theta}{dx} - 1 \quad (3.16)$$

と表されます。

一方、曲率半径 $R$ の位置の中立面では、線長が変わらないため

$$Rd\theta = dx \quad (3.17)$$

の関係があります。上式を式(3.16)に代入し

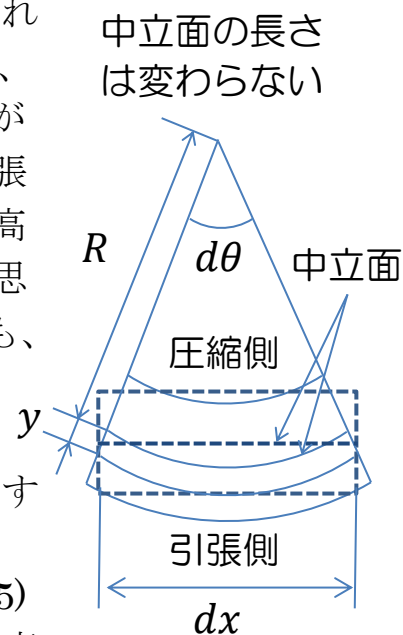
$$\begin{aligned} \varepsilon(y) &= \frac{dx + yd\theta}{dx} - 1 \\ &= y \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \quad (3.18)$$

となります。上式より、中立面から遠く、変位角 $d\theta$ が大きいほど、ひずみが大きいことがわかります。感覚に合う結果ではないでしょうか。

また、上式より断面の応力 $\sigma(y)$ は、ヤング率 $E$ を用いて

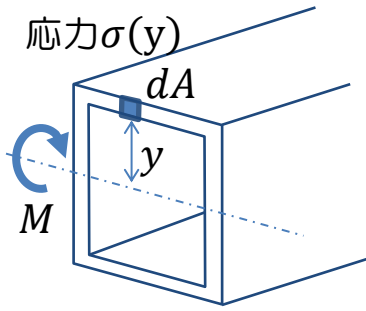
$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = Ey \frac{d\theta}{dx} \quad (3.19)$$

と表すことができます。





断面応力 $\sigma$ の積分  
がモーメント $M$



次に、上式の応力 $\sigma(y)$ と断面に働く曲げモーメント $M(x)$ の関係を考えます。曲げモーメントは、図(欄外)のように断面の部材長手方向の応力とつり合いの状態にあります。従って、断面の微小部分 $dA$ の中立面からの距離を $y$ 、その応力を $\sigma(y)$ とすれば

$$M(x) = \int_A y\sigma(y)dA \quad (3.20)$$

の関係が成り立ちます。上式に式(3.19)を代入すれば

$$M(x) = E \frac{d\theta}{dx} \int_A y^2 dA \quad (3.21)$$

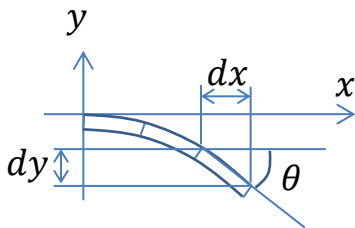
となります。ここで、断面2次モーメント $I$ を

$$I = \int_A y^2 dA \quad (3.22)$$

と定義し、式(3.21)を置き換えれば、梁の微小長さ $dx$ 当たりの変位角 $d\theta$ は

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3.23)$$

と表されます。上式より、曲げモーメント $M(x)$ が大きく、ヤング率 $E$ 、断面2次モーメント $I$ が小さいほど梁はよく曲がる、すなわち $dx$ 当たりの $d\theta$ が大きいことがわかります。



ここで、図(欄外)のように、微小長さ $dx$ 、梁の $y$ 方向変位 $dy$ 、梁の角度 $\theta$ の間には

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.24)$$

という幾何学的な関係が成り立ちます。また、 $\theta$ が非常に小さい場合に限定すれば、上式は

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (3.25)$$

と表すことができます。従って、上式を式(3.23)に代入すれば、梁のたわみの式が得られます。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3.26)$$

材料力学の教科書では、上式の右辺にマイナス符号がつくことが一般的です。これは、梁の上面が圧縮するモーメントを正とし、梁の下方方向の変位を正としているためです。

本来ならば、この古典的な座標の取り方を尊重すべきと思いますが、図面の座標値を元に有限要素法の計算を行う場合には混乱を招く座標系です。従って、物理ノートでは慣習を敢えて無視し、「梁の上方向の変位を正」、「梁の上面が圧縮するモーメントを正」として扱います。

### 3.3.2. 片持ち梁のたわみ モーメント $M$

それでは式(3.26)を使って、片持ち梁の先端に曲げモーメント  $M$  を加えた場合の梁のたわみを求めます。梁に働く曲げモーメント  $M(x)$  は、梁の全ての位置  $x$  で

$$M(x) = M \quad (3.27)$$

です。従って梁のたわみの式は、上式を式(3.26)に代入し

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (3.28)$$

となります。たわみ角  $\theta$  は上式の積分により

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \approx \theta &= \int \frac{M}{EI} dx \\ &= \frac{M}{EI} x + C_1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

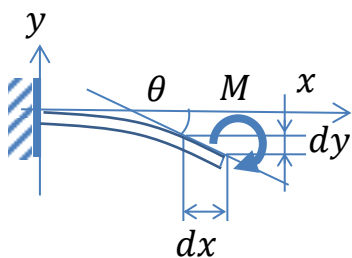
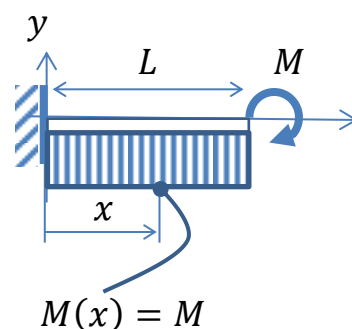
と求まります。たわみ  $y$  は、さらに1回の積分により

$$\begin{aligned} y &= \int \left( \frac{M}{EI} x + C_1 \right) dx \\ &= \frac{M}{2EI} x^2 + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

となります。ここで、片持ち梁は固定端  $x = 0$  で  $\theta = y = 0$  から  $C_1 = C_2 = 0$  と求まります。以上より、片持ち梁のたわみは

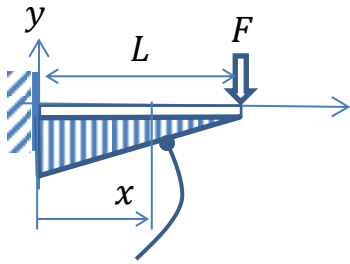
$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{M}{EI} x \\ y(x) &= \frac{M}{2EI} x^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

となります。

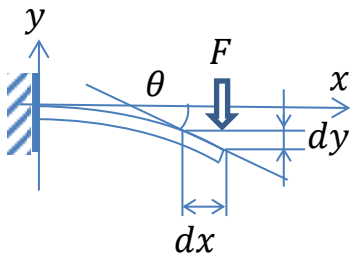


$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

### 3.3.3.片持ち梁のたわみ 荷重 $F$



$$M(x) = F(L - x)$$



$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

一方、片持ち梁の先端に荷重 $F$ を加えた場合の梁の曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = FL - Fx \quad (3.32)$$

と表されます。従って梁のたわみの式は、上式を式(3.26)に代入し

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{EI} M(x) \\ &= \frac{F}{EI} (L - x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

となります。たわみ角 $\theta$ は上式の積分により

$$\begin{aligned} \theta &\approx \frac{dy}{dx} = \int \frac{F}{EI} (L - x) dx \\ &= \frac{F}{EI} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

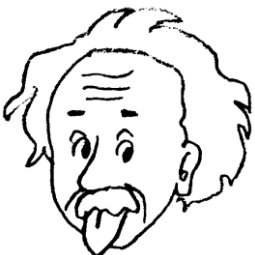
と求まります。たわみ $y$ は、さらに1回の積分により

$$\begin{aligned} y &= \int \left\{ \frac{F}{EI} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right\} dx \\ &= \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

となります。ここで、片持ち梁は固定端 $x = 0$ で、 $\theta = y = 0$ であるため $C_1 = C_2 = 0$ と求まります。以上より

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{F}{2EI} (2Lx - x^2) \\ y(x) &= \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3) \end{aligned} \quad (3.36)$$

となります。



アルベルト・アインシュタイン

人間としての真の偉大さにいたる道は、ひとつしかない。  
それは何度もひどい目にあうという試練の道である。

### 3.3.4. 単純支持梁のたわみ 荷重 $F$

式(3.26)を使って、単純支持梁のたわみを求めます。荷重  $F$  を加えたときの、AB 区間と BC 区間の梁の曲げモーメント  $M_{AB}(x)$ 、 $M_{BC}(x)$  は

$$M_{AB}(x) = \frac{Fl_2}{L}x \quad M_{BC}(x) = \frac{Fl_1}{L}(L-x) \quad (3.37)$$

と表されます。上式を式(3.26)に代入し

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{Fl_2}{EIL}x \quad \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{Fl_1}{EIL}(L-x) \quad (3.38)$$

となります。たわみ角  $\theta$  は上式の積分により

$$\theta_1 \approx \frac{dy_1}{dx} = -\frac{Fl_2}{2EIL}x^2 + C_1 \quad \theta_2 \approx \frac{dy_2}{dx} = -\frac{Fl_1}{2EIL}(L-x)^2 + C_3 \quad (3.39)$$

と求まります。たわみ  $y$  は、さらに 1 回の積分により

$$y_1 = -\frac{Fl_2}{6EIL}x^3 + C_1x + C_2 \quad y_2 = -\frac{Fl_1}{6EIL}(L-x)^3 + C_3(L-x) + C_4 \quad (3.40)$$

となります。ここで、単純支持梁は支持位置  $x=0$  で  $y_1=0$ 、 $x=L$  で  $y_2=0$  であるため  $C_2=C_4=0$  です。また、中間部 B で変位と角度が等しいため、式(3.39)、(3.40)に  $x=l_1$  を代入した

$$-\frac{Fl_2}{2EIL}l_1^2 + C_1 = \frac{Fl_1}{2EIL}(L-l_1)^2 + C_3 \quad (3.41)$$

$$-\frac{Fl_2}{6EIL}l_1^3 + C_1l_1 = -\frac{Fl_1}{6EIL}(L-l_1)^3 - C_3(L-l_1) \quad (3.42)$$

の関係があります。式変形の詳細は割愛しますが、上式より

$$C_1 = \frac{Fl_2(L^2 - l_2^2)}{6EIL} \quad C_3 = -\frac{Fl_1(L^2 - l_1^2)}{6EIL} \quad (3.43)$$

と求まります。以上より、AB 区間のたわみ角  $\theta_1$  とたわみ  $y_1$  は

$$\theta_1(x) = -\frac{Fl_2}{2EIL}x^2 + \frac{Fl_2(L^2 - l_2^2)}{6EIL} \quad (3.44)$$

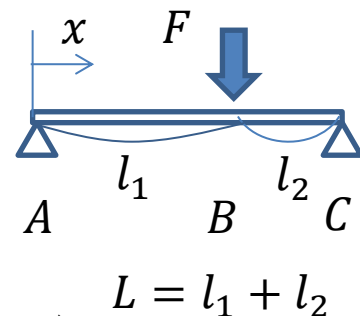
$$y_1(x) = -\frac{Fl_2}{6EIL}x^3 + \frac{Fl_2(L^2 - l_2^2)}{6EIL}x$$

BC 区間のたわみ角  $\theta_2$  とたわみ  $y_2$  は

$$\theta_2(x) = -\frac{Fl_1}{2EIL}(L-x)^2 - \frac{Fl_1(L^2 - l_1^2)}{6EIL} \quad (3.45)$$

$$y_2(x) = -\frac{Fl_1}{6EIL}(L-x)^3 - \frac{Fl_1(L^2 - l_1^2)}{6EIL}(L-x)$$

と求まります。

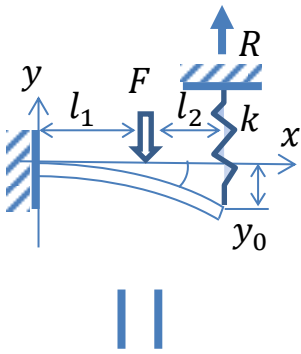


### 3.4. 不静定梁

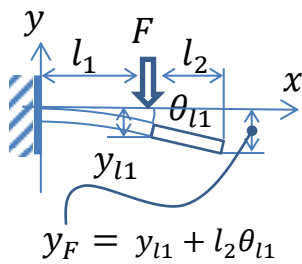
梁のたわみを考慮して解く問題を、不静定梁の問題と呼びます。「不静定」という言葉が難しく聞こえますが、片持ち梁に複数の荷重を加えたときの曲げモーメントを重ね合わせて解くことができます。

#### 3.4.1.ばねで支えられた片持ち梁 荷重 $F$

始めに、図(欄外上)のように先端をばねで支えられた片持ち梁に荷重 $F$ を加えたときの曲げモーメントを考えます。見慣れないばね要素が問題を複雑に見せていますが、片持ち梁に2つの荷重 $F$ 、 $R$  (ばねの反力)を加えたシンプルな問題です。片持ち梁に2つの荷重を、別々に加えたときの梁の先端の変位の合計が $y_0$ と考えて解くことができます。

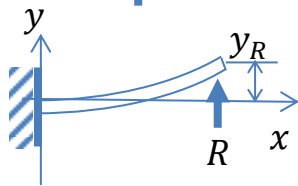


||



$$y_F = y_{l_1} + l_2 \theta_{l_1}$$

+



始めに荷重 $F$ による梁の先端の変位 $y_F$ を考えます。入力点 $x = l_1$ に生じるたわみ角 $\theta_{l_1}$ と変位 $y_{l_1}$ は、式(3.36)より

$$\theta_{l_1} = \frac{Fl_1^2}{2EI} \quad y_{l_1} = \frac{Fl_1^3}{3EI} \quad (3.46)$$

です。入力点より先では、梁は真っ直ぐであるため、先端の変位 $y_F$ は

$$\begin{aligned} y_F &= y_{l_1} + l_2 \sin \theta_{l_1} \approx y_{l_1} + l_2 \theta_{l_1} \\ &= \frac{Fl_1^3}{3EI} + \frac{Fl_1^2 l_2}{2EI} \end{aligned} \quad (3.47)$$

と表すことができます。

一方、ばねの反力 $R$ による梁の先端の変位 $y_R$ は

$$y_R = \frac{R(l_1 + l_2)^3}{3EI} \quad (3.48)$$

であるため、梁の先端の変位 $y_0$ はトータル

$$y_0 = y_F - y_R = \left( \frac{Fl_1^3}{3EI} + \frac{Fl_1^2 l_2}{2EI} \right) - \frac{R(l_1 + l_2)^3}{3EI} \quad (3.49)$$

となります。上式のばねの反力 $R$ は未知数ですが、図(欄外上)のように $R = ky_0$ の関係があるため

$$R = k \left\{ \left( \frac{Fl_1^3}{3EI} + \frac{Fl_1^2 l_2}{2EI} \right) - \frac{R(l_1 + l_2)^3}{3EI} \right\}$$

$$R \left\{ 1 + k \frac{(l_1 + l_2)^3}{3EI} \right\} = k \left( \frac{Fl_1^3}{3EI} + \frac{Fl_1^2 l_2}{2EI} \right)$$

$$R \left\{ \frac{6EI}{k} + 2(l_1 + l_2)^3 \right\} = 2Fl_1^3 + 3Fl_1^2 l_2$$

$$R = \frac{l_1^2(2l_1 + 3l_2)}{\frac{6EI}{k} + 2(l_1 + l_2)^3} F$$

と求められます。

以上、片持ち梁に加わる全ての荷重が求まったため、梁の曲げモーメントを計算することができます。入力点の曲げモーメント $M_1$ は図(欄外)のように $F$ と $R$ の重ね合わせから

$$M_1 = Rl_2 \quad (3.51)$$

と求まります。また、固定端の曲げモーメント $M_0$ は

$$M_0 = Fl_1 - R(l_1 + l_2) \quad (3.52)$$

と求まります。

例題として、図(欄外)のように先端を単純支持した片持ち梁の曲げモーメントを考えます。単に支持ばね $k = \infty$ と考えればよいので、次のように求められます。

$$R = \frac{l_1^2(2l_1 + 3l_2)}{\frac{6EI}{\infty} + 2(l_1 + l_2)^3} F = \frac{l_1^2(2l_1 + 3l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} F$$

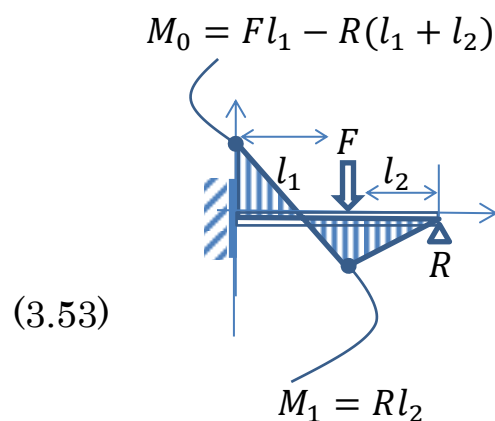
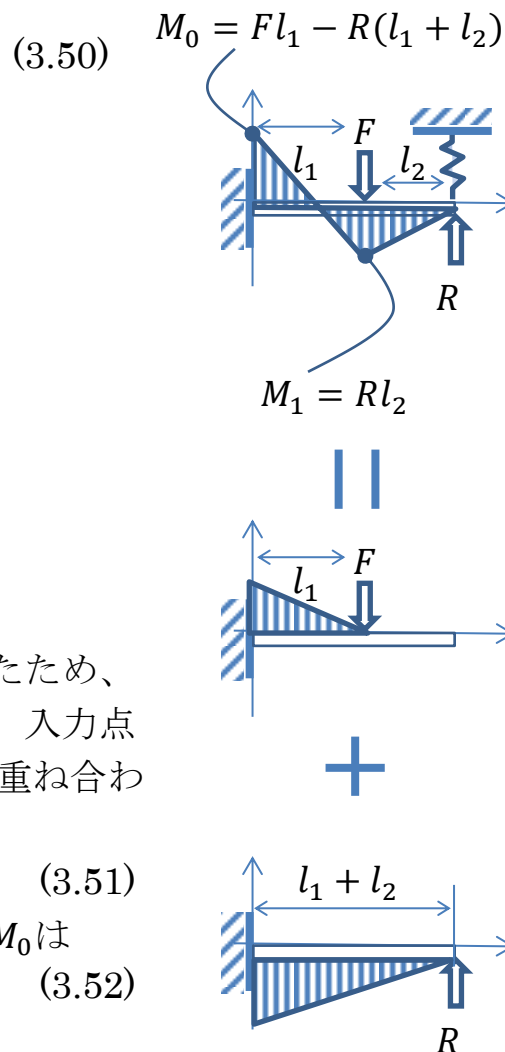
$$M_1 = Rl_2 = \frac{l_1^2 l_2(2l_1 + 3l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} F$$

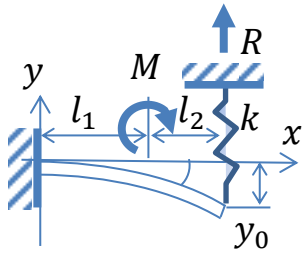
$$M_0 = Fl_1 - R(l_1 + l_2)$$

$$= Fl_1 - \frac{l_1^2(2l_1 + 3l_2)}{2(l_1 + l_2)^2} F$$

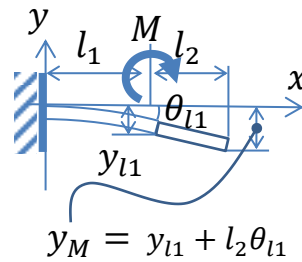
$$= \frac{2l_1(l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2) - l_1^2(2l_1 + 3l_2)}{2(l_1 + l_2)^2} F$$

$$= \frac{l_1 l_2(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^2} F$$

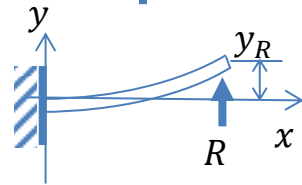




||



+



### 3.4.2.ばねで支えられた片持ち梁 モーメントM

先端をばねで支えられた片持ち梁にモーメント $M$ を加える場合を考えます。図(欄外)のように、片持ち梁にモーメント $M$ とばねの反力 $R$ を、別々に加えたときの梁の先端の変位の合計が $y_0$ と考えて解くことができます。

モーメント $M$ によって入力点 $x = l_1$ に生じるたわみ角 $\theta_{l_1}$ と変位 $y_{l_1}$ は式(3.31)より

$$\theta_{l_1} = \frac{M}{EI} l_1 \quad y_{l_1} = \frac{M}{2EI} l_1^2 \quad (3.54)$$

であるため、梁の先端の変位 $y_M$ は

$$\begin{aligned} y_M &= y_{l_1} + l_2 \sin \theta_{l_1} \approx y_{l_1} + l_2 \theta_{l_1} \\ &= \frac{M l_1^2}{2EI} + \frac{M l_1 l_2}{EI} \end{aligned} \quad (3.55)$$

と表されます。一方、ばねの反力 $R$ による梁の先端の変位 $y_R$ は式(3.36)より

$$y_R = \frac{R(l_1 + l_2)^3}{3EI} \quad (3.56)$$

であるため、梁の先端の変位 $y_0$ はトータル

$$y_0 = y_M - y_R = \left( \frac{M l_1^2}{2EI} + \frac{M l_1 l_2}{EI} \right) - \frac{R(l_1 + l_2)^3}{3EI} \quad (3.57)$$

となります。以上より、ばねの反力 $R$ は

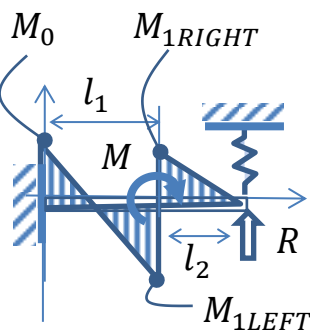
$$\begin{aligned} R &= k y_0 \\ &= k \left\{ \left( \frac{M l_1^2}{2EI} + \frac{M l_1 l_2}{EI} \right) - \frac{R(l_1 + l_2)^3}{3EI} \right\} \end{aligned}$$

$$R \left\{ 1 + \frac{k(l_1 + l_2)^3}{3EI} \right\} = k \left( \frac{M l_1^2}{2EI} + \frac{M l_1 l_2}{EI} \right) \quad (3.58)$$

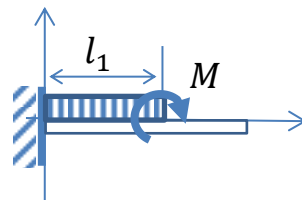
$$R \left\{ \frac{6EI}{k} + 2(l_1 + l_2)^3 \right\} = 3M l_1^2 + 6M l_1 l_2$$

$$R = \frac{3l_1(l_1 + 2l_2)}{\frac{6EI}{k} + 2(l_1 + l_2)^3} M$$

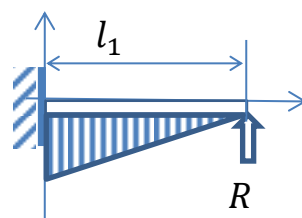
と求まるため、入力点の曲げモーメント $M_{1RIGHT}$ と $M_{1LEFT}$ は $M$ と $R$ の重ね合わせから



||



+



$$M_{1RIGHT} = Rl_2 = \frac{3l_1l_2(l_1 + 2l_2)}{\frac{6EI}{k} + 2(l_1 + l_2)^3} M \quad (3.59)$$

$$M_{1LEFT} = M - M_{1RIGHT} = M \left\{ 1 - \frac{3l_1l_2(l_1 + 2l_2)}{\frac{6EI}{k} + 2(l_1 + l_2)^3} \right\}$$

と求まります。また、固定端の曲げモーメント $M_0$ は

$$M_0 = M - R(l_1 + l_2) \quad (3.60)$$

となります。

例題として、図(欄外)のように先端を単純支持した片持ち梁の曲げモーメントを考えます。単に支持ばね $k = \infty$ と考えればよいため、次のように求められます。

$$R = \frac{3l_1(l_1 + 2l_2)}{\frac{6EI}{\infty} + 2(l_1 + l_2)^3} M = \frac{3l_1(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} M$$

$$M_{1RIGHT} = Rl_2 = \frac{3l_1l_2(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} M$$

$$M_{1LEFT} = M - M_{1RIGHT} = M \left\{ 1 - \frac{3l_1l_2(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} \right\} \quad (3.61)$$

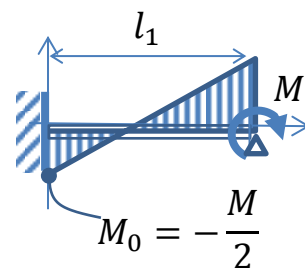
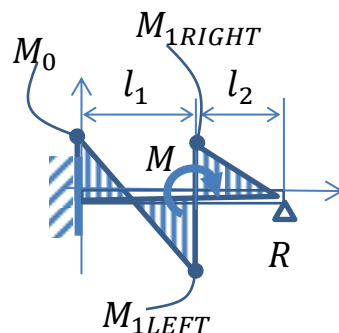
$$\begin{aligned} M_0 &= M - R(l_1 + l_2) \\ &= M - \frac{3l_1(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^2} M \\ &= M \left\{ 1 - \frac{3l_1(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^2} \right\} \end{aligned}$$

さらに、図(欄外)のように $l_2 = 0$ の場合は

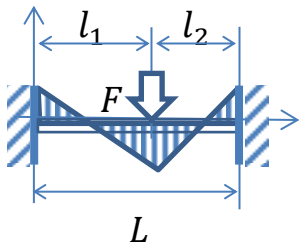
$$R = \frac{3l_1(l_1 + 0)}{\frac{6EI}{\infty} + 2(l_1 + 0)^3} M = \frac{3M}{2l_1}$$

$$\begin{aligned} M_{1LEFT} &= M - M_{1RIGHT} = M - 0 = M \\ M_0 &= M - Rl_1 \\ &= M - \frac{3M}{2l_1} l_1 \\ &= -\frac{M}{2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

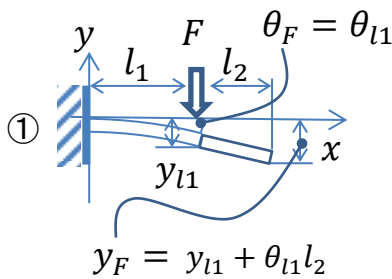
となります。実感しづらい結果ですが、先端を単純支持した片持ち梁の先端に曲げモーメント $M$ を加えると、固定端には入力点の半分の曲げモーメントが働きます。





3.4.3. 両端固定梁 荷重  $F$ 

||



$$\theta_{l1} = \frac{Fl_1^2}{2EI} \quad y_{l1} = \frac{Fl_1^3}{3EI} \quad (3.63)$$

であるため、梁の先端に生じる角度と変位は

$$\begin{aligned} \theta_F = \theta_{l1} &= \frac{Fl_1^2}{2EI} \\ y_F = y_{l1} + l_2 \sin \theta_{l1} &= y_{l1} + l_2 \theta_{l1} \quad (3.64) \\ &= \frac{Fl_1^3}{3EI} + l_2 \frac{Fl_1^2}{2EI} \end{aligned}$$

です。同様に、図(欄外)の②に示す片持ち梁の先端に、反力  $R$  を加えたときの梁の先端の角度と変位は

$$\theta_R = \frac{RL^2}{2EI} \quad y_R = \frac{RL^3}{3EI} \quad (3.65)$$

また、図(欄外)の③に示す片持ち梁の先端に、曲げモーメント反力  $M$  を加えたときの梁の先端の角度と変位は

$$\theta_M = \frac{ML}{EI} \quad y_M = \frac{ML^2}{2EI} \quad (3.66)$$

になります。

両端固定の梁は、片持ち梁の先端の変位と角度が 0 になる、と考えればよいので、 $y_F = y_R + y_M$  より

$$\frac{Fl_1^3}{3EI} + l_2 \frac{Fl_1^2}{2EI} = \frac{RL^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} \quad (3.67)$$

$$2Fl_1^3 + 3Fl_1^2l_2 = 2RL^3 + 3ML^2$$

の関係があります。また同様に、 $\theta_F = \theta_R + \theta_M$  より

$$\frac{Fl_1^2}{2EI} = \frac{RL^2}{2EI} + \frac{ML}{EI} \quad (3.68)$$

$$R = \frac{Fl_1^2 - 2ML}{L^2}$$

です。上式を式(3.67)に代入し  $M$  を求めます。

$$\begin{aligned}
2Fl_1^3 + 3Fl_1^2l_2 &= 2(Fl_1^2 - 2ML)L + 3ML^2 \\
2Fl_1^3 + 3Fl_1^2l_2 &= 2Fl_1^2L - ML^2 \\
ML^2 &= 2Fl_1^2L - 2Fl_1^3 - 3Fl_1^2l_2 \\
ML^2 &= Fl_1^2(2L - 2l_1 - 3l_2)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

ここで、 $L = l_1 + l_2$ と置きかえれば

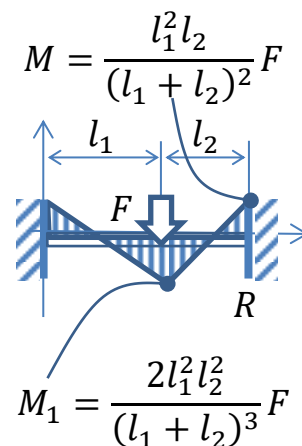
$$M = -\frac{Fl_1^2l_2}{L^2} \tag{3.70}$$

上式を式(3.68)に代入し、片持ち梁の先端の反力 $R$ は

$$\begin{aligned}
R &= \frac{Fl_1^2 - 2ML}{L^2} \\
&= \frac{Fl_1^2}{L^2} - \frac{2M}{L} \\
&= \frac{Fl_1^2}{L^2} + \frac{2}{L} \cdot \frac{Fl_1^2l_2}{L^2} \\
&= \frac{Fl_1^2}{L^3}(L + 2l_2) \\
&= \frac{l_1 + l_2 + 2l_2}{L^3}Fl_1^2 \\
&= \frac{(l_1 + 3l_2)l_1^2}{(l_1 + l_2)^3}F
\end{aligned} \tag{3.71}$$

と求まります。以上より、入力点の曲げモーメント $M_1$ は、 $M$ と $R$ の重ね合わせから次のように求められます。

$$\begin{aligned}
M_1 &= M + Rl_2 \\
&= -\frac{l_1^2l_2}{L^2}F + \frac{(l_1 + 3l_2)l_1^2}{L^3}Fl_2 \\
&= \frac{Fl_1^2l_2}{L^3}\{-L + (l_1 + 3l_2)\} \\
&= \frac{2l_1^2l_2}{(l_1 + l_2)^3}F
\end{aligned} \tag{3.72}$$



3.4.4. 両端固定梁 モーメント  $M$ 

両端固定梁に曲げモーメント  $M$  を加えたときの曲げモーメント分布を考えます。前項と同様に、片持ち梁に荷重  $F$ 、反力  $R$ 、曲げモーメント反力  $M$  を、別々に加えたときの先端の変位と角度の合計が  $0$  になる、と考えることができます。

荷重  $M$  によって生じる荷重点  $x = l_1$  の角度と変位は

$$\theta_{l_1} = \frac{Ml_1}{EI} \quad y_{l_1} = \frac{Ml_1^2}{2EI} \quad (3.73)$$

であるため、梁の先端に生じる角度と変位は

$$\begin{aligned} \theta_M = \theta_{l_1} &= \frac{Ml_1}{EI} \\ y_M = y_{l_1} + l_2 \sin \theta_{l_1} &= y_{l_1} + l_2 \theta_{l_1} \quad (3.74) \\ &= \frac{Ml_1^2}{2EI} + l_2 \frac{Ml_1}{EI} \end{aligned}$$

です。一方、反力  $R$  による梁の先端の角度と変位は

$$\theta_R = \frac{RL^2}{2EI} \quad y_R = \frac{RL^3}{3EI} \quad (3.75)$$

また、曲げモーメント反力  $m$  による梁の先端の角度と変位は

$$\theta_m = \frac{mL}{EI} \quad y_m = \frac{mL^2}{2EI} \quad (3.76)$$

ここで、 $y_M + y_R + y_m = 0$  より

$$\frac{Ml_1^2}{2EI} + l_2 \frac{Ml_1}{EI} + \frac{RL^3}{3EI} + \frac{mL^2}{2EI} = 0 \quad (3.77)$$

$$3Ml_1^2 + 6Ml_1l_2 + 2RL^3 + 3mL^2 = 0$$

の関係があります。同様に  $\theta_M + \theta_R + \theta_m = 0$  より

$$\frac{Ml_1}{EI} + \frac{RL^2}{2EI} + \frac{mL}{EI} = 0 \quad (3.78)$$

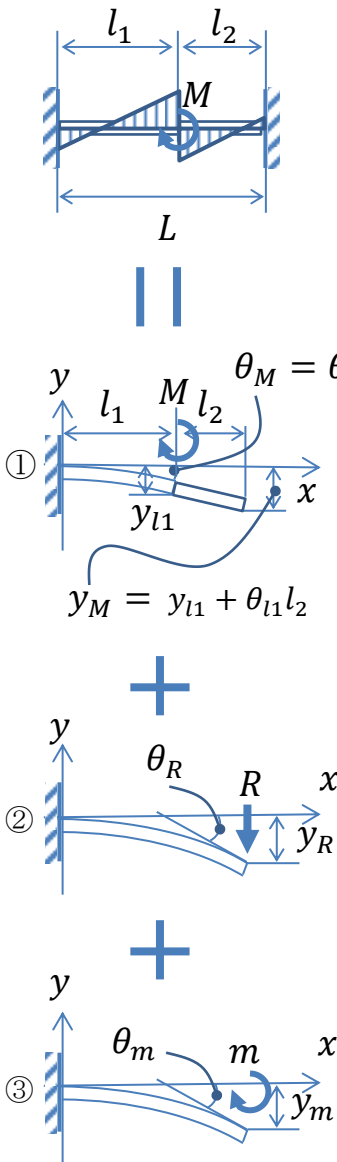
$$R = -\frac{2(Ml_1 + mL)}{L^2}$$

の関係があります。上式を式(3.77)に代入し  $m$  を求めます。

$$\begin{aligned} 3Ml_1^2 + 6Ml_1l_2 - 4(Ml_1 + mL)L + 3mL^2 &= 0 \\ mL^2 &= -4Ml_1L + 3Ml_1^2 + 6Ml_1l_2 \quad (3.79) \end{aligned}$$

$$mL^2 = Ml_1(-4L + 3l_1 + 6l_2)$$

ここで、 $L = l_1 + l_2$  と置きかえれば



$$m = \frac{Ml_1(-l_1 + 2l_2)}{L^2} \quad (3.80)$$

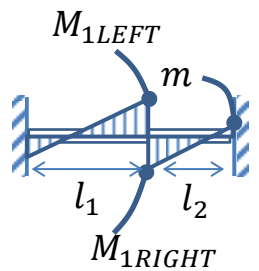
上式を式(3.78)に代入し、片持ち梁の先端の反力 $R$ は

$$\begin{aligned} R &= -\frac{2(Ml_1 + mL)}{L^2} \\ &= -\frac{2Ml_1}{L^2} - \frac{2m}{L} \\ &= -\frac{2Ml_1}{L^2} - \frac{2}{L} \cdot \frac{Ml_1(-l_1 + 2l_2)}{L^2} \\ &= -\frac{2Ml_1}{L^2} \left(1 + \frac{-l_1 + 2l_2}{L}\right) \\ &= -\frac{2Ml_1}{L^2} \cdot \frac{l_1 + l_2 - l_1 + 2l_2}{L} \\ &= -\frac{6Ml_1l_2}{L^3} \end{aligned} \quad (3.81)$$

と求まります。以上より、入力点の曲げモーメント  $M_{1RIGHT}$ 、 $M_{1LEFT}$  は、 $m$  と  $R$  の重ね合わせから次のように求められます。

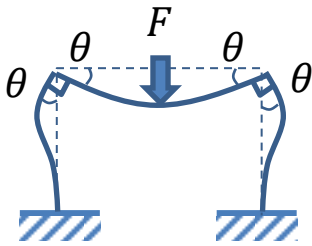
$$\begin{aligned} M_{1RIGHT} &= m + Rl_2 \\ &= \frac{Ml_1(-l_1 + 2l_2)}{L^2} - \frac{6Ml_1l_2}{L^3}l_2 \\ &= -\frac{Ml_1}{L^3} \{(l_1 + l_2)(l_1 - 2l_2) + 6l_2^2\} \\ &= -\frac{Ml_1}{(l_1 + l_2)^3} (l_1^2 - 2l_1l_2 + l_1l_2 - 2l_2^2 + 6l_2^2) \\ &= -Ml_1 \frac{l_1^2 - l_1l_2 + 4l_2^2}{(l_1 + l_2)^3} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} M_{1LEFT} &= M + m + Rl_2 = M + M_{1RIGHT} \\ &= M \left\{ 1 - \frac{l_1^3 - l_1^2l_2 + 4l_1l_2^2}{(l_1 + l_2)^3} \right\} \\ &= M \frac{3l_1^2l_2 + 3l_1l_2^2 + l_2^3 + l_1^2l_2 - 4l_1l_2^2}{(l_1 + l_2)^3} \\ &= M \frac{l_2^3 + 4l_1^2l_2 - l_1l_2^2}{(l_1 + l_2)^3} \\ &= Ml_2 \frac{l_2^2 - l_1l_2 + 4l_1^2}{(l_1 + l_2)^3} \end{aligned}$$



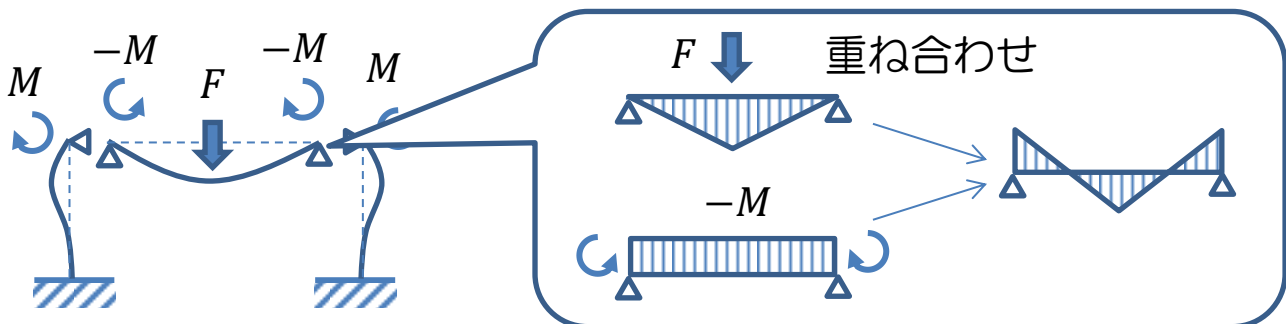
### 3.4.5. 門形ラーメン その1

複数の梁が剛に接続され、接続部の両側の梁のたわみ角が等しくなる構造をラーメンと呼びます。複雑なラーメンの計算では、有限要素法を利用することが一般的ですが、一度手で解いてみると曲げモーメント分布の成り立ちが理解できます。



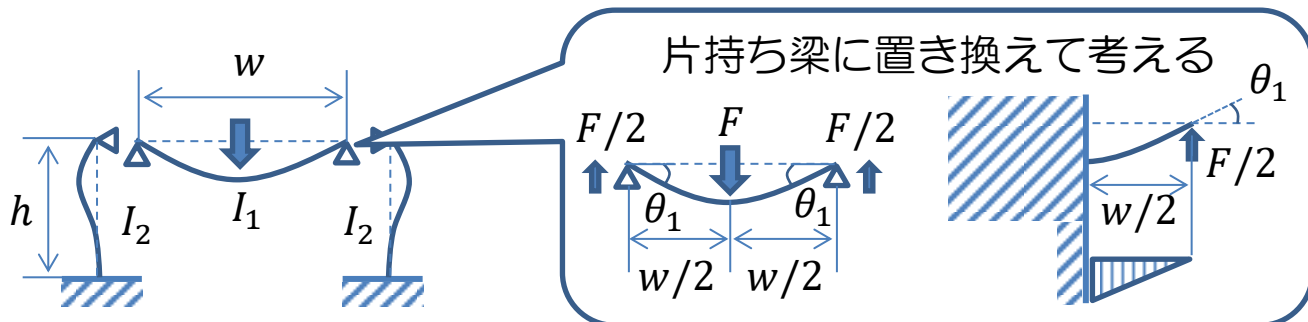
図(欄外)のような、左右対称な門形ラーメンの横部材の曲げモーメントは、横部材を単純支持梁と見立てた時の曲げモーメント分布に、接続部のたわみ角 $\theta$ に応じた、縦部材の曲げモーメント反力 $-M$ を重ね合わせたものと考えることができます。

結果として横部材の曲げモーメント分布は、下図のように、縦部材の曲げモーメント反力 $-M$ の分だけ、両端固定梁の曲げモーメント分布に近づきます。



ここで、2つの未知数 $M$ 、 $\theta$ を求めるためには、 $M$ 、 $\theta$ の関係式が2つ必要になります。ラーメンでは接続部のたわみ角 $\theta$ が縦部材と横部材で等しいため、各々の部材で $M$ 、 $\theta$ の関係式を得ることができます。

始めに横部材のたわみ角 $\theta$ を $F$ と $M$ で表すことを考えます。下図(次ページ)のような横部材の、荷重 $F$ によるたわみ角 $\theta_1$ は、中央で半分に分け、中央部を固定端と考えた長さ $w/2$ の片持ち梁から計算できます。



$$\theta_1 = \frac{1}{EI_1} \int_0^{\frac{w}{2}} \frac{F}{2} x dx = \frac{F}{2EI_1} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{w}{2}} = \frac{Fw^2}{16EI_1} \quad (3.83)$$

また同様に、曲げモーメント反力 $-M$ によるたわみ角 $\theta_2$ は図(欄外)より次のように求められます。

$$\theta_2 = \frac{1}{EI_1} \int_0^{\frac{w}{2}} -M dx = -\frac{F}{EI_1} [x]_0^{\frac{w}{2}} = -\frac{Mw}{2EI_1} \quad (3.84)$$

以上より、1つ目の $M$ 、 $\theta$ の関係式として

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{Fw^2}{16EI_1} - \frac{Mw}{2EI_1} \quad (3.85)$$

が得られます。

次に縦部材に着目し、曲げモーメント反力 $M$ とたわみ角 $\theta$ の関係式を考えます。図(欄外)のように、縦部材と横部材の接続部は、曲げモーメント $M$ のほかに横部材の軸方向反力 $R$ を受けます。ここで、前提条件として、横部材の軸方向は剛性が高く、横方向の変位は0と仮定すれば、縦部材は先端を単純支持された片持ち梁と考えることができます。

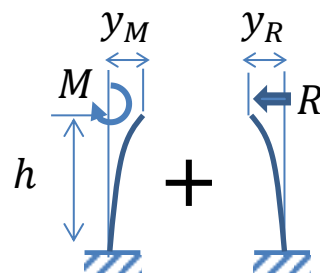
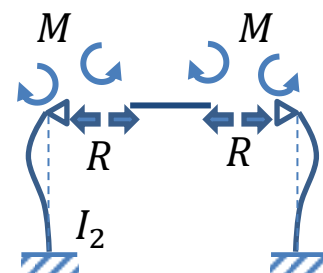
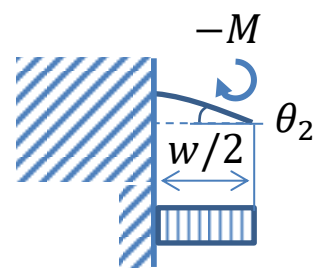
従って、左側の縦部材の曲げモーメント分布 $M(x)$ は、図(欄外)のような片持ち梁に、曲げモーメント $M$ と反力 $R$ を加えたときに変位が0となる条件から、計算することができます。曲げモーメント $M$ による先端の変位 $y_M$ は式(3.31)より

$$y_M = \frac{Mh^2}{2EI_2} \quad (3.86)$$

一方、反力 $R$ による先端の変位 $y_R$ は式(3.36)より

$$y_R = \frac{R}{6EI_2} (3h^3 - h^3) = \frac{Rh^3}{3EI_2} \quad (3.87)$$

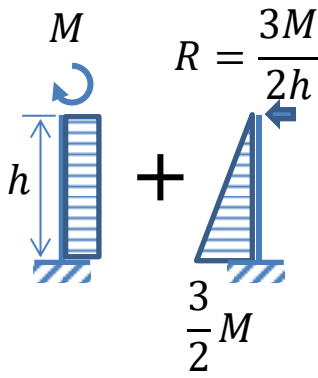
です。



ここで、先端の変位が0となる条件は $y_M = y_R$ です。従って、反力 $R$ は次式のように求まります。

$$\frac{Mh^2}{2EI_2} = \frac{Rh^3}{3EI_2} \quad (3.88)$$

$$R = \frac{3M}{2h}$$



以上より、縦部材の曲げモーメント分布 $M(x)$ は、図(欄外)のように曲げモーメント $M$ と反力 $R$ によって生じる曲げモーメントの重ね合わせとして表され、接地面からの距離を $x$ と置けば

$$M(x) = \frac{3M}{2h}x - \frac{M}{2} \quad (3.89)$$

となります。従って、接続部のたわみ角 $\theta$ は

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{EI_2} \int_0^h M(x) dx \\ &= \frac{1}{EI_2} \int_0^h \left( \frac{3M}{2h}x - \frac{M}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{EI_2} \left( \frac{3M}{2h} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^h - \frac{M}{2} [x]_0^h \right) \\ &= \frac{1}{EI_2} \left( \frac{3M}{4h}h - \frac{M}{2}h \right) = \frac{Mh}{4EI_2} \end{aligned} \quad (3.90)$$

と表されます。

以上で曲げモーメント反力 $M$ とたわみ角 $\theta$ の関係式が2つ求まりました。式(3.85)と式(3.90)から $\theta$ を消去し、曲げモーメント反力 $M$ を計算できます。

$$\frac{Mh}{4EI_2} = \frac{Fw^2}{16EI_1} - \frac{Mw}{2EI_1} \quad (3.91)$$

ここで、部材の剛性を代表する値として $k_1 = EI_1/w$ 、 $k_2 = EI_2/h$ を定義し、上式を置き換え

$$\frac{M}{4k_2} = \frac{Fw}{16k_1} - \frac{M}{2k_1} \quad (3.92)$$

さらに、上式の両辺に $4k_1k_2$ を乗じ、 $M$ を求めると

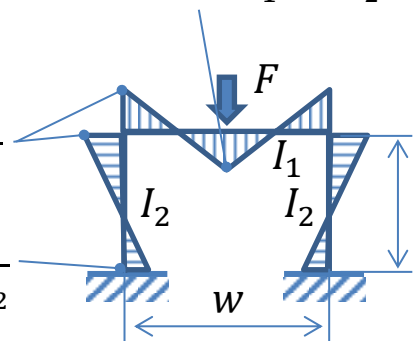
$$\begin{aligned} k_1M &= \frac{Fw}{4}k_2 - 2k_2M \\ M &= \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

従って、横部材の入力点の曲げモーメント $M_0$ は、図(欄外)のような荷重 $F$ による単純支持梁の曲げモーメント $Fw/4$ に、縦部材の曲げモーメント反力 $-M$ を重ね合わせ、次式のように求められます。

$$M_0 = \frac{Fw}{4} - M = \frac{Fw}{4} - \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} \quad (3.94)$$

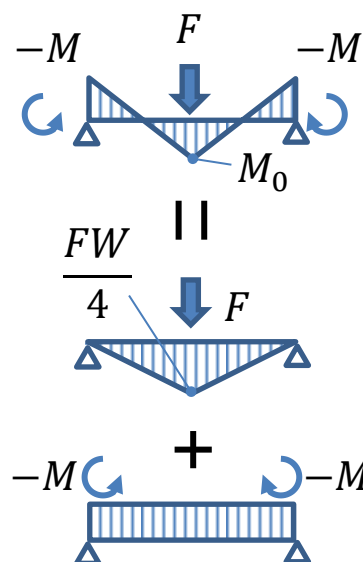
$$= \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 + 2k_2}$$

$$M = \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2}$$

$$M_2 = \frac{Fw}{8} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2}$$


$$k_1 = \frac{EI_1}{w}$$

$$k_2 = \frac{EI_2}{h}$$

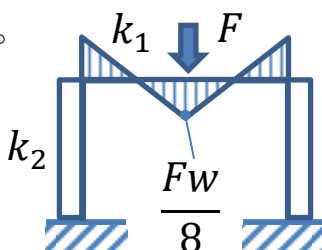


最後に、式(3.93)と式(3.94)を観察し、部材の剛性と横部材の曲げモーメント分布の関係を整理しておきます。

横部材にくらべて縦部材の剛性が高い場合( $k_1 \ll k_2$ )、横部材の曲げモーメント分布は両端固定梁に近づきます。

$$M = \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} \rightarrow \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{2k_2} = \frac{Fw}{8} \quad (3.95)$$

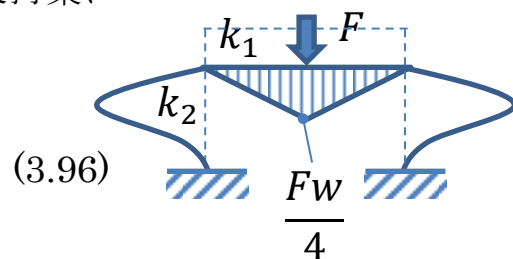
$$\therefore M_0 = \frac{Fw}{4} - M = \frac{Fw}{4} - \frac{Fw}{8} = \frac{Fw}{8}$$



一方、横部材にくらべて縦部材の剛性が高い場合( $k_1 \gg k_2$ )、横部材の曲げモーメント分布は単純支持梁に近づきます。

$$M = \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} \rightarrow \frac{Fw}{4} \cdot 0 = 0$$

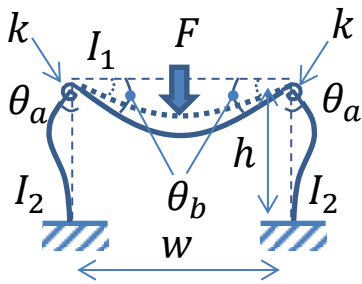
$$\therefore M_0 = \frac{Fw}{4} - M = \frac{Fw}{4} - 0 = \frac{Fw}{4}$$



以上より、横部材の着力点の曲げモーメント $M_0$ は、部材間の剛性の大小関係次第で変化するため、強度確保に必要な断面耐力も変化します。従って、「強度の設計を行う」ことは、同時に「剛性の設計を行う」ことでもあります。始めは複雑に感じますが、まずはシンプルに、「力は硬い方に流れ、柔らかい方は助けられる」と考えると、徐々に複雑な曲げモーメント分布と部材間の剛性の関係をイメージできると思います。

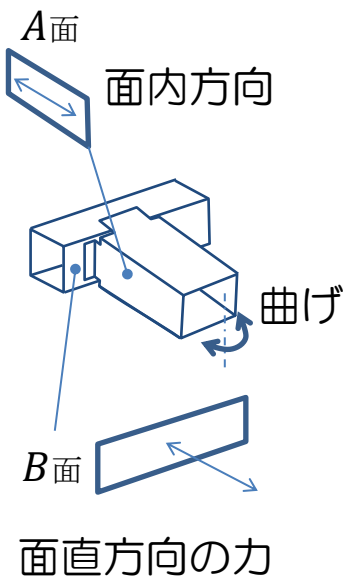


## 3.4.6. 門形ラーメン その1 実際の構造



応用問題として、前節の門形ラーメンの横部材と縦部材の接続部に回転剛性 $k$ を持つ構造の曲げモーメント分布を計算します。

接続部が大きな中実の塊で、回転剛性 $k = \infty$ と見なせるならば、縦部材と横部材の接続部の変位角は等しいラーメン構造となります。しかし、一般的な構造では、接続部は有限の剛性 $k$ を持つため、接続部の変位角は異なる値 $\theta_a$ 、 $\theta_b$ となります。



例えば、図(欄外)のような中空の構造を曲げる場合、A面の面内方向の力は、B面を面直方向に押す力となります。B面のような、中空の構造物を構成する平面は、面直方向の力に対し、剛性が弱く変形が大きくなるため、接続部の変位角 $\theta_k$ が生じます。

それでは、接続部の回転剛性 $k$ が門形ラーメンの曲げモーメント分布に及ぼす影響を式で確認してみます。図(欄外)のように、横部材のたわみ角を $\theta_a$ 、縦部材のたわみ角を $\theta_b$ と置けば、式(3.85)と式(3.90)より

$$\theta_a = \frac{Fw^2}{16EI_1} - \frac{Mw}{2EI_1} \quad (3.97)$$

$$\theta_b = \frac{Mh}{4EI_2} \quad (3.98)$$

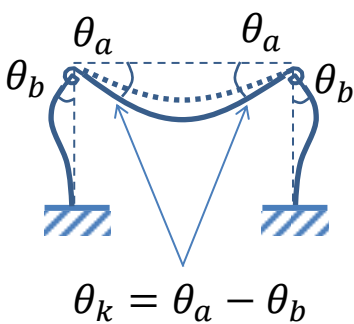
となります。ここで、接続部のたわみ角 $\theta_k$ は

$$\theta_k = \theta_a - \theta_b \quad (3.99)$$

と表せるため、接続部に発生する曲げモーメント $M$ は

$$\begin{aligned} M &= k\theta_k \\ \therefore \theta_k &= \frac{M}{k} \end{aligned} \quad (3.100)$$

と表されます。以上4つの方程式から、4つの未知数 $\theta_a$ 、 $\theta_b$ 、 $\theta_k$ 、 $M$ を計算することができます。



始めに接続部の曲げモーメント $M$ を求めます。式(3.99)に式(3.97)、(3.98)、(3.100)を代入し

$$\frac{M}{k} = \frac{Fw^2}{16EI_1} - \frac{Mw}{2EI_1} - \frac{Mh}{4EI_2} \quad (3.101)$$

$$M \left( \frac{1}{k} + \frac{w}{2EI_1} + \frac{h}{4EI_2} \right) = \frac{Fw^2}{16EI_1}$$

となります。ここで、部材の剛性を代表する値として $k_1 = EI_1/w$ 、 $k_2 = EI_2/h$ を定義し、上式を置き換え

$$M \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{4k_2} \right) = \frac{Fw}{16k_1} \quad (3.102)$$

$$M \left( \frac{16k_1k_2}{k} + 8k_2 + 4k_1 \right) = Fwk_2$$

$$\therefore M = \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2 + \frac{4k_1k_2}{k}}$$

と求められます。上式より、例えば $k_1k_2 \ll k$ の場合（梁に比べて接続部の回転剛性 $k$ が強い場合）は式(3.93)の門形ラーメンの接続部の曲げモーメントに一致することがわかります。

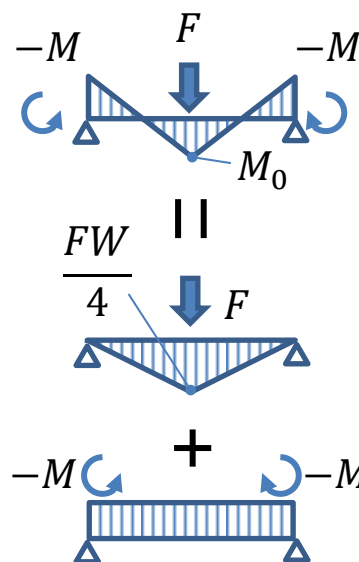
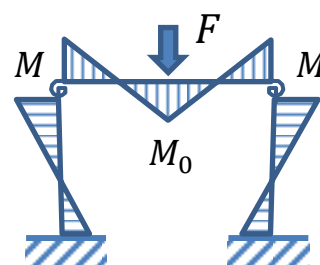
一方、横部材の入力点の曲げモーメント $M_0$ は、図(欄外)のような荷重 $F$ による単純支持梁の曲げモーメント $Fw/4$ に、縦部材の曲げモーメント反力 $-M$ を重ね合わせ、次式のように求められます。

$$M_0 = \frac{Fw}{4} - M$$

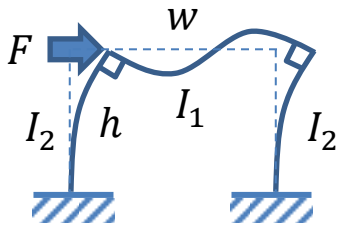
$$= \frac{Fw}{4} \left( 1 - \frac{k_2}{k_1 + 2k_2 + \frac{4k_1k_2}{k}} \right) \quad (3.103)$$

$$= \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2 + \frac{4k_1k_2}{k}}{k_1 + 2k_2 + \frac{4k_1k_2}{k}}$$

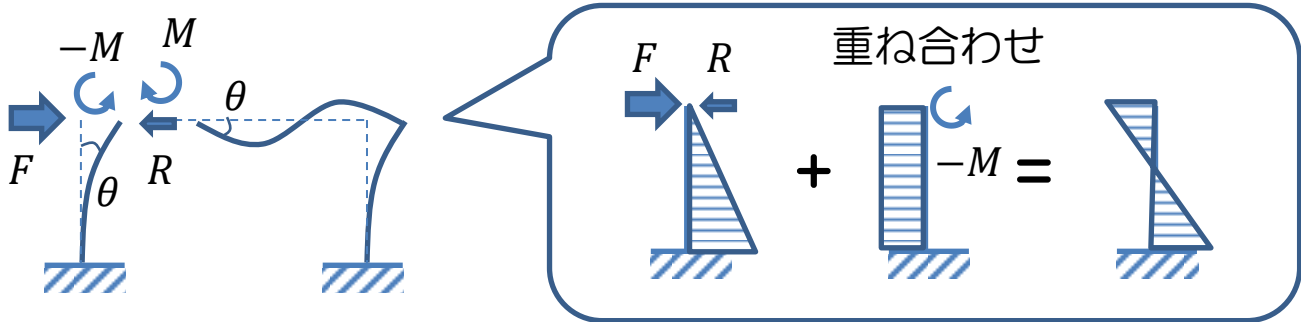
上式より入力点の曲げモーメント $M_0$ は $k_1k_2 \gg k$ 、または $k_1 \gg k_2$ のとき（横部材に比べて回転剛性 $k$ 、または縦部材が弱い場合）最大値 $M_0 = FW/4$ となります。従って、入力点の強度確保の観点から、接続部の回転剛性 $k$ と縦部材の剛性 $k_1$ が重要であることがわかります。



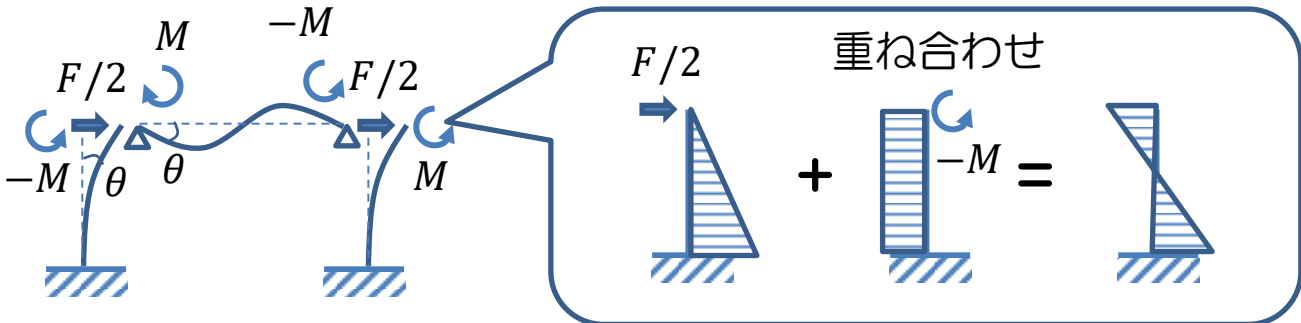
## 3.4.7. 門形ラーメン その2



図(欄外)の左右対称な門形ラーメンの縦部材の曲げモーメント分布は、縦部材を片持ち梁と見立てたときの曲げモーメント分布に、横部材の曲げモーメント反力 $-M$ 、軸方向の反力 $R$ を重ね合わせたものと考えることができます。

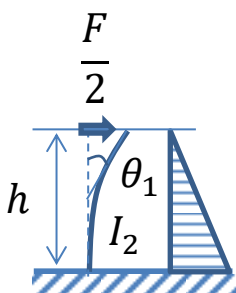


前提条件として、横部材の軸方向の剛性は、縦部材の曲げ剛性に比べて十分高く、軸方向のたわみを0と仮定すれば、縦部材の横方向の変位は左右で等しくなります。従って $R = F/2$ となり、下図のように考えることができます。



ここで、2つの未知数 $M$ 、 $\theta$ を求めるためには、 $M$ と $\theta$ の関係式が2つ必要になります。前項同様、接続部のたわみ角 $\theta$ が縦部材と横部材で等しいことから、各々の部材で $M$ 、 $\theta$ の関係式を考えます。

始めに縦部材のたわみ角 $\theta$ を $F$ と $M$ で表すことを考えます。図(欄外)のように縦部材に荷重 $F/2$ が加わった時の先端のたわみ角 $\theta_1$ は次式のように計算されます。



$$\theta_1 = \frac{1}{EI_2} \int_0^h \frac{F}{2} x dx = \frac{F}{2EI_2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^h = \frac{Fh^2}{4EI_2} \quad (3.104)$$

また、曲げモーメント反力 $-M$ が加わった時の先端のたわみ角 $\theta_2$ は

$$\theta_2 = \frac{1}{EI_2} \int_0^h -M dx = -\frac{M}{EI_2} [x]_0^h = -\frac{Mh}{EI_2} \quad (3.105)$$

となります。以上より、1つ目の $M$ 、 $\theta$ の関係式として

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{Fh^2}{4EI_2} - \frac{Mh}{EI_2} \quad (3.106)$$

が得られます。

次に、横部材に働く曲げモーメント反力 $M$ とたわみ角 $\theta$ の関係を考えます。図(欄外)のように単純支持された横部材に、上側が圧縮される曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ が働く一般的な場合を考えます。曲げモーメント分布 $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{M_2 - M_1}{w} x + M_1 \quad (3.107)$$

と表されるため、たわみ角 $\theta(x)$ は

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{1}{EI_1} \int M(x) dx \\ &= \frac{1}{EI_1} \int \left( \frac{M_2 - M_1}{w} x + M_1 \right) dx \\ &= \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{w} \cdot \frac{x^2}{2} + M_1 x \right) + C_1 \end{aligned} \quad (3.108)$$

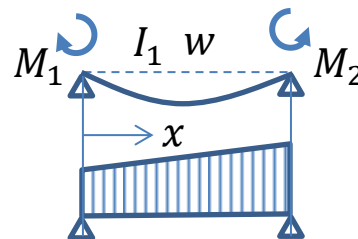
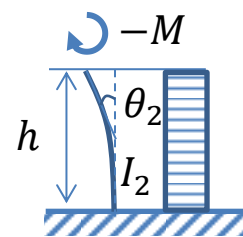
となります。また、たわみ $y(x)$ は上式を積分し

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \theta(x) dx \\ &= \int \left\{ \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{w} \cdot \frac{x^2}{2} + M_1 x \right) + C_1 \right\} dx \\ &= \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{w} \cdot \frac{x^3}{6} + M_1 \cdot \frac{x^2}{2} \right) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (3.109)$$

となります。ここで、単純支持梁の両端の変位は0であることから、 $y(0) = 0$ の条件から $C_2 = 0$ となり、上式は

$$y(x) = \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{w} \cdot \frac{x^3}{6} + M_1 \cdot \frac{x^2}{2} \right) + C_1 x \quad (3.110)$$

と表されます。



さらに、 $y(w) = 0$ の条件で上式から $C_1$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{w} \cdot \frac{w^3}{6} + M_1 \cdot \frac{w^2}{2} \right) + C_1 w &= 0 \\ \frac{w^2}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1 + 3M_1}{6} \right) + C_1 w &= 0 \\ \frac{w}{6EI_1} (2M_1 + M_2) + C_1 &= 0 \\ C_1 &= -\frac{w}{6EI_1} (2M_1 + M_2) \end{aligned} \quad (3.111)$$

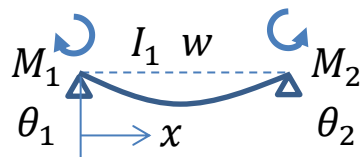
となります。以上より上式と $C_2 = 0$ を式(3.108)に代入し、任意の $x$ での単純支持梁のたわみ角 $\theta(x)$ は

$$\theta(x) = \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{w} \cdot \frac{x^2}{2} + M_1 x \right) - \frac{w}{6EI_1} (2M_1 + M_2) \quad (3.112)$$

と表されます。従って、単純支持梁の両端 $x = 0$ 、 $x = w$ でのたわみ角 $\theta$ は

$$\begin{aligned} \theta(0) &= -\frac{w}{6EI_1} (2M_1 + M_2) \\ \theta(w) &= \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_2 - M_1}{2} \cdot w + M_1 w \right) - \frac{w(2M_1 + M_2)}{6EI_1} \\ &= \frac{1}{EI_1} \left( \frac{M_1 + M_2}{2} w \right) - \frac{w(2M_1 + M_2)}{6EI_1} \\ &= \frac{w}{6EI_1} (3M_1 + 3M_2 - 2M_1 - M_2) \\ &= \frac{w}{6EI_1} (M_1 + 2M_2) \end{aligned} \quad (3.113)$$

となります。ここで、梁に生じる右回りのたわみ角を正と定義すれば、上式は

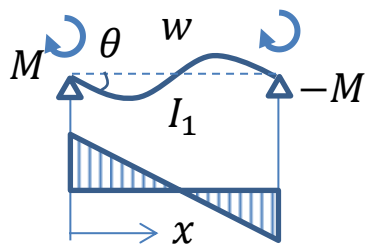


$$\theta_1 = \theta(0) = \frac{w}{6EI_1} (2M_1 + M_2) \quad (3.114)$$

$$\theta_2 = \theta(w) = -\frac{w}{6EI_1} (M_1 + 2M_2)$$

と表されます。

以上より、横部材に働く曲げモーメント反力 $M$ と接続部のたわみ角 $\theta$ の関係式は、上式の1行目に $M_1 = M$ 、 $M_2 = -M$ を代入し



$$\theta = \frac{Mw}{6EI_1} \quad (3.115)$$

となります。

以上で横部材の曲げモーメント反力 $M$ とたわみ角 $\theta$ の関係式が2つ求まりました。式(3.106)と式(3.115)から $\theta$ を消去し、曲げモーメント反力 $M$ を計算できます。

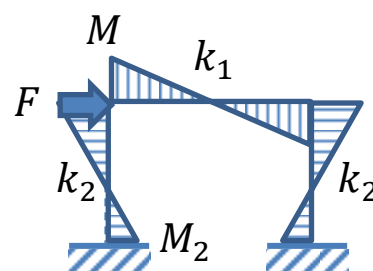
$$\frac{Mw}{6EI_1} = \frac{Fh^2}{4EI_2} - \frac{Mh}{EI_2} \quad (3.116)$$

ここで、部材の剛性を代表する値として $k_1 = EI_1/w$ 、 $k_2 = EI_2/h$ を定義し、上式を置き換え

$$\frac{M}{6k_1} = \frac{Fh}{4k_2} - \frac{M}{k_2} \quad (3.117)$$

と表します。上式の両辺に $4k_1k_2$ を乗じて $M$ を求めると

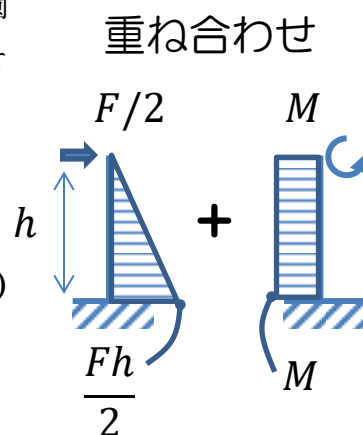
$$\begin{aligned} Mk_2 &= \frac{Fh}{2} \cdot 3k_1 - 6Mk_1 \\ M(6k_1 + k_2) &= \frac{Fh}{2} \cdot 3k_1 \\ M &= \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1}{6k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (3.118)$$



となります。

一方、縦部材の固定壁側の曲げモーメント $M_2$ は、図(欄外)のように、片持ち梁の曲げモーメントと上式の曲げモーメント反力 $-M$ の重ね合わせになるため

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{Fh}{2} - M \\ &= \frac{Fh}{2} \left( 1 - \frac{3k_1}{6k_1 + k_2} \right) \\ &= \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1 + k_2}{6k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (3.119)$$

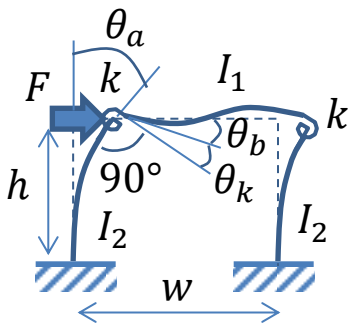


となります。上式より $k_1 \gg k_2$ のとき $M_2$ は最小値 $Fh/4$ となります。

$$\begin{aligned} M &= \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1}{6k_1 + k_2} \\ M_2 &= \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1 + k_2}{6k_1 + k_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{EI_1}{w} \\ k_2 &= \frac{EI_2}{h} \end{aligned}$$

## 3.4.8. 門形ラーメン その2 実際の構造



応用問題として、前節の門形ラーメンの横部材と縦部材の接続部に回転剛性 $k$ を持つ構造の曲げモーメント分布を計算します。

図(欄外)のように、縦部材のたわみ角を $\theta_a$ 、横部材のたわみ角を $\theta_b$ と置けば、式(3.106)と式(3.115)より

$$\theta_a = \frac{Fh^2}{4EI_2} - \frac{Mh}{EI_2} \quad (3.120)$$

$$\theta_b = \frac{Mw}{6EI_1} \quad (3.121)$$

となります。ここで、接続部のたわみ角 $\theta_k$ は

$$\theta_k = \theta_a - \theta_b \quad (3.122)$$

と表せるため、接続部に発生する曲げモーメント $M$ は

$$M = k\theta_k \quad (3.123)$$

$$\therefore \theta_k = \frac{M}{k}$$

と表されます。以上4つの方程式から、4つの未知数 $\theta_a$ 、 $\theta_b$ 、 $\theta_k$ 、 $M$ を計算することができます。

始めに接続部の曲げモーメント $M$ を求めます。式(3.122)に式(3.120)、(3.121)、(3.123)を代入し

$$\frac{M}{k} = \frac{Fh^2}{4EI_2} - \frac{Mh}{EI_2} - \frac{Mw}{6EI_1} \quad (3.124)$$

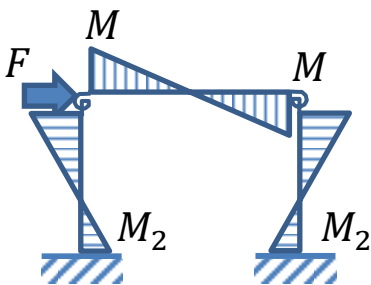
$$M \left( \frac{1}{k} + \frac{h}{EI_2} + \frac{w}{6EI_1} \right) = \frac{Fh^2}{4EI_2}$$

となります。ここで、部材の剛性を代表する値として $k_1 = EI_1/w$ 、 $k_2 = EI_2/h$ を定義し、上式を置き換え

$$M \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{6k_1} \right) = \frac{Fh}{4k_2}$$

$$M \left( \frac{12k_1k_2}{k} + 12k_1 + 2k_2 \right) = 3Fhk_1 \quad (3.125)$$

$$\therefore M = \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1}{6k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}}$$

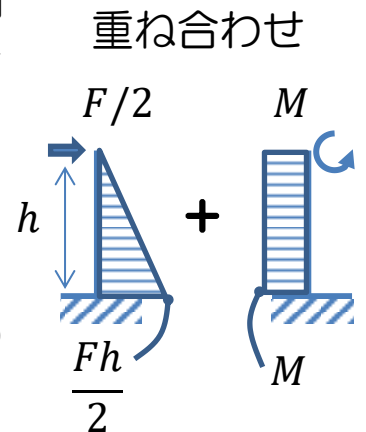


と求まります。上式より、例えば $k_1k_2 \ll k$ の場合（梁に比べて接続部の回転剛性 $k$ が強い場合）は式(3.118)の門形

ラーメンの接続部の曲げモーメントに一致することがわかります。

一方、縦部材の固定壁側の曲げモーメント $M_2$ は、図(欄外)のように、片持ち梁の曲げモーメントと上式の曲げモーメント反力 $-M$ の重ね合わせになるため

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{Fh}{2} - M \\ &= \frac{Fh}{2} \left( 1 - \frac{3k_1}{6k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}} \right) \\ &= \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}}{6k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}} \end{aligned} \quad (3.126)$$



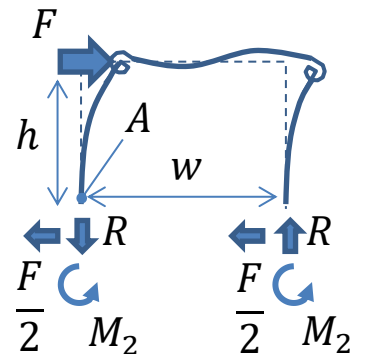
となります。上式より固定壁側の曲げモーメント $M_2$ は $k_1k_2 \gg k$ 、または $k_2 \gg k_1$ のとき（縦部材に比べて回転剛性 $k$ または、横部材が弱い場合）最大値 $M_2 = Fh/2$ となります。

ここで参考に、縦部材の固定端側の上下反力 $R$ を計算します。図(欄外)のように門形ラーメン全体におけるA点周りのモーメントのつり合いから

$$Fh = 2 \cdot \frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}}{6k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}} + Rw \quad (3.127)$$

の関係が成り立ちます。上式を整理すれば

$$\begin{aligned} R &= \frac{Fh}{w} \left( 1 - \frac{3k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}}{6k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}} \right) \\ &= \frac{Fh}{w} \cdot \frac{3k_1}{6k_1 + k_2 + \frac{6k_1k_2}{k}} \end{aligned} \quad (3.128)$$

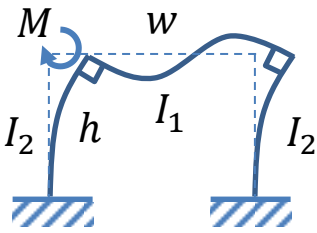


となります。上式より、固定端側の上下反力 $R$ は、 $k_1k_2 \gg k$ 、または $k_2 \gg k_1$ のとき（縦部材に比べて回転剛性 $k$ 、または横部材が弱い場合）最小値0となります。

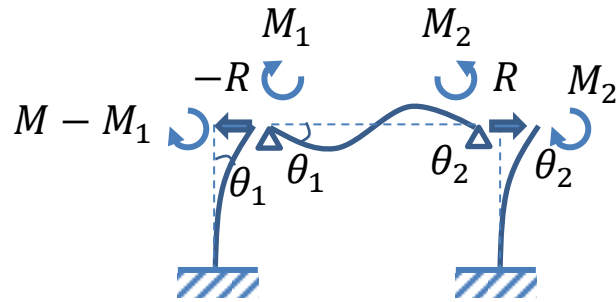
以上より、回転剛性 $k$ と横部材の剛性 $k_1$ を高くすれば、固定端の反力は「 $R$ 大、 $M_2$ 小」、すなわち、曲げモーメント $M_2$ で支える構造から軸力 $R$ で支える構造に変化させることができます。



## 3.4.9. 門形ラーメン その3



図(欄外)の左右対称な門形ラーメンの角部に曲げモーメント $M$ を加えたときの曲げモーメント分布を計算します。曲げモーメント $M$ のうち、横部材が受け持つ曲げモーメントを $M_1$ と置けば、左側の縦部材が受け持つ曲げモーメントは $M - M_1$ となります。



従って、縦部材の曲げモーメント分布は、縦部材を片持ち梁と見立て、曲げモーメント $M - M_1$ と横部材の軸方向の反力 $-R$ を加えたものと考えることができます。ここで、左側の縦部材のたわみ角 $\theta_1$ は、式(3.31)、(3.36)から

$$\theta_1 = \frac{(M - M_1)h}{EI_2} + \frac{-Rh^2}{2EI_2} \quad (3.129)$$

と表すことができます。

同様に、右側の縦部材のたわみ角 $\theta_2$ は、横部材の右側に働く曲げモーメントを $M_2$ と置けば

$$\theta_2 = \frac{M_2 h}{EI_2} + \frac{Rh^2}{2EI_2} \quad (3.130)$$

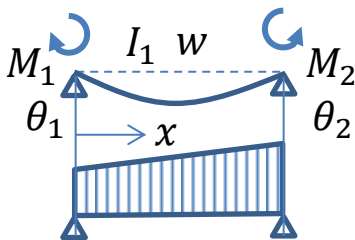
と表されます。

一方、横部材の接続部のたわみ角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ は縦部材の接続部のたわみ角に等しいため、横部材に働く曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ を式(3.114)に代入し

$$\theta_1 = \frac{w}{6EI_1} (2M_1 + M_2) \quad (3.131)$$

$$\theta_2 = -\frac{w}{6EI_1} (M_1 + 2M_2) \quad (3.132)$$

と表すことができます。



また、左側の縦部材の横方向の変位を $y$ と置けば、式(3.31)、(3.36)から

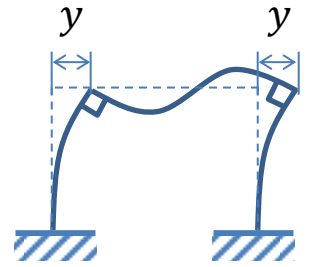
$$y = \frac{(M - M_1)h^2}{2EI_2} - \frac{Rh^3}{3EI_2} \quad (3.133)$$

となります。ここで前提条件として、横部材の軸方向の剛性は、縦部材の曲げ剛性に比べて十分高く、軸方向のたわみを0と仮定すれば、右側の縦部材の横方向の変位も $y$ となります。従って、右側の縦部材の変位 $y$ は

$$y = \frac{M_2h^2}{2EI_2} + \frac{Rh^3}{3EI_2} \quad (3.134)$$

と表すことができます。

以上、6つの方程式から、6つの未知数 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $R$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $y$ を計算することができます。以下に計算過程を記載しますが、結果のみ必要な場合は式(3.143)まで飛ばしてください。



始めに、軸方向反力 $R$ を部材の曲げモーメントで表します。式(3.133)と式(3.134)から $y$ を消去し

$$\frac{(M - M_1)h^2}{2EI_2} - \frac{Rh^3}{3EI_2} = \frac{M_2h^2}{2EI_2} + \frac{Rh^3}{3EI_2} \quad (3.135)$$

となります。上式の両辺に、 $6EI_2/h^2$ を乗じて $R$ について整理すれば

$$\begin{aligned} 3(M - M_1) - 2Rh &= 3M_2 + 2Rh \\ 3(M - M_1) - 3M_2 &= 4Rh \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$R = \frac{3}{4h}(M - M_1 - M_2)$$

となります。 $y$ が消えて、式と変数は5つになりました。

次に、式(3.129)、(3.130)、(3.131)、(3.132)から $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を消去し、部材の剛性を代表する値として、 $k_1 = EI_1/w$ 、 $k_2 = EI_2/h$ を用いれば

$$\begin{cases} \frac{1}{6k_1}(2M_1 + M_2) = \frac{M - M_1}{k_2} - \frac{Rh}{2k_2} \\ -\frac{1}{6k_1}(M_1 + 2M_2) = \frac{M_2}{k_2} + \frac{Rh}{2k_2} \end{cases} \quad (3.137)$$

となります。これで、式と変数は3つになりました。

さらに、上式に $24k_1k_2$ を乗じ

$$\begin{cases} 4k_2(2M_1 + M_2) = 24k_1(M - M_1) - 12k_1Rh \\ -4k_2(M_1 + 2M_2) = 24k_1M_2 + 12k_1Rh \end{cases} \quad (3.138)$$

と変形します。ここで、上式に式(3.136)を代入し

$$\begin{cases} 4k_2(2M_1 + M_2) = 24k_1(M - M_1) - 9k_1(M - M_1 - M_2) \\ -4k_2(M_1 + 2M_2) = 24k_1M_2 + 9k_1(M - M_1 - M_2) \end{cases} \quad (3.139)$$

また、上式を $M_1$ 、 $M_2$ について整理し

$$\begin{cases} (15k_1 + 8k_2)M_1 + (4k_2 - 9k_1)M_2 = 15k_1M \\ (9k_1 - 4k_2)M_1 - (15k_1 + 8k_2)M_2 = 9k_1M \end{cases} \quad (3.140)$$

行列で表すと

$$\begin{bmatrix} 15k_1 + 8k_2 & 4k_2 - 9k_1 \\ 9k_1 - 4k_2 & -15k_1 - 8k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15k_1M \\ 9k_1M \end{Bmatrix} \quad (3.141)$$

となります。

ここで、上式左辺の行列式を $D$ と置けば

$$\begin{aligned} D &= (15k_1 + 8k_2)(-15k_1 - 8k_2) - (4k_2 - 9k_1)(9k_1 - 4k_2) \\ &= -(225k_1^2 + 240k_1k_2 + 64k_2^2) + (81k_1^2 - 72k_1k_2 + 16k_2^2) \\ &= -(144k_1^2 + 312k_1k_2 + 48k_2^2) \\ &= -24(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2) \end{aligned} \quad (3.142)$$

従って、式(3.141)の逆行列の計算から $M_1$ 、 $M_2$ を求めると

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -15k_1 - 8k_2 & -4k_2 + 9k_1 \\ -9k_1 + 4k_2 & 15k_1 + 8k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 15k_1M \\ 9k_1M \end{Bmatrix} \\ &= \frac{k_1M}{D} \begin{Bmatrix} -225k_1 - 120k_2 - 36k_2 + 81k_1 \\ -135k_1 + 60k_2 + 135k_1 + 72k_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{k_1M}{D} \begin{Bmatrix} -144k_1 - 156k_2 \\ 132k_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{k_1M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} \begin{Bmatrix} 12k_1 + 13k_2 \\ -11k_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.143)$$

となります。上式の横部材の両端の曲げモーメントと周辺の曲げモーメント $M_3$ 、 $M_4$ 、 $M_5$ を下図に示します。

$$M_1 = \frac{(12k_1 + 13k_2)k_1M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} \quad M_2 = \frac{-11k_1k_2M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)}$$

$k_1 = \frac{I_1}{w}$   
 $k_2 = \frac{I_2}{h}$

$M_3$ は横部材の曲げモーメント $M_1$ によって助けられ

$$\begin{aligned} M_3 &= M - M_1 \\ &= \frac{12k_1^2 + 26k_1k_2 + 4k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M - M_1 \quad (3.144) \\ &= \frac{13k_1k_2 + 4k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M \end{aligned}$$

となります。次に $M_4$ 、 $M_5$ を求めるために、軸方向反力 $R$ を求めます。式(3.136)に式(3.143)の $M_1$ 、 $M_2$ を代入し

$$\begin{aligned} R &= \frac{3}{4h} (M - M_1 - M_2) \\ &= \frac{3}{4h} \left\{ M_3 - \frac{-11k_1k_2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M \right\} \quad (3.145) \\ &= \frac{3M}{4h} \left\{ \frac{24k_1k_2 + 4k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} \right\} \\ &= \frac{M}{h} \left\{ \frac{18k_1k_2 + 3k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} \right\} \end{aligned}$$

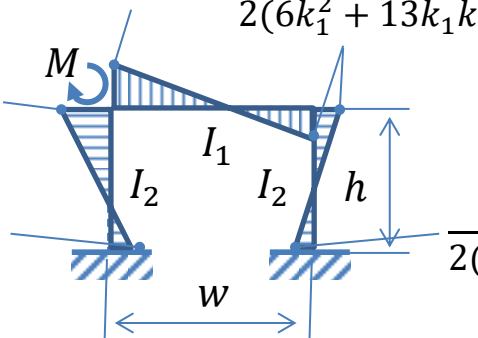
と求まります。以上より

$$\begin{aligned} M_4 &= M_3 - Rh \\ &= M_3 - \frac{18k_1k_2 + 3k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M \quad (3.146) \\ &= \frac{-5k_1k_2 + k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M \end{aligned}$$

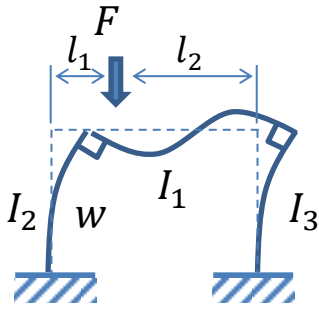
また

$$\begin{aligned} M_5 &= M_2 + Rh \\ &= M_2 + \frac{18k_1k_2 + 3k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M \quad (3.147) \\ &= \frac{7k_1k_2 + 3k_2^2}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} M \end{aligned}$$

となります。

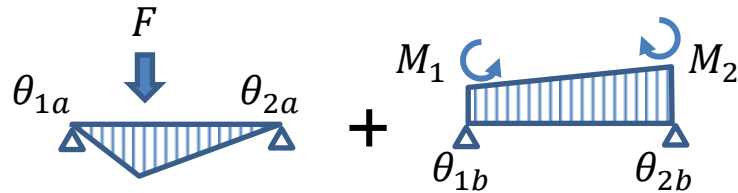
$$\begin{aligned} &\frac{(12k_1 + 13k_2)k_1 M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} && \frac{-11k_1k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} && k_1 = \frac{I_1}{w} \\ &\frac{(13k_1 + 4k_2)k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} && && k_2 = \frac{I_2}{h} \\ &\frac{(-5k_1 + k_2)k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} && && \frac{(7k_1 + 3k_2)k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1k_2 + 2k_2^2)} \end{aligned}$$


## 3.4.10. 門形ラーメン その4

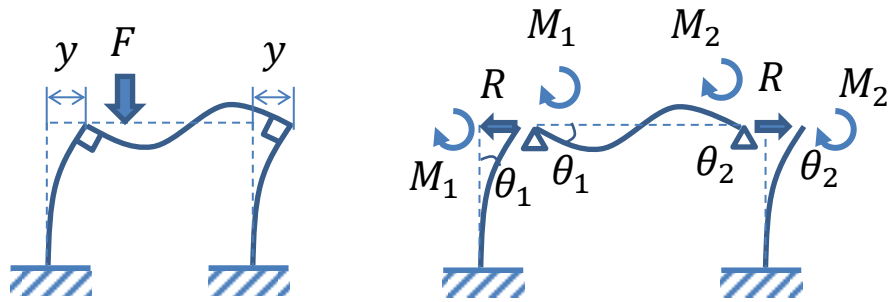


図(欄外)の門形ラーメンの曲げモーメント分布を計算します。

次のように考えます。まず横部材は、単純支持梁の曲げモーメントに対して、左右の縦部材が反モーメント $M_1$ 、 $M_2$ で助けてくれます。



一方で、左右非対称であることから、左右の縦部材の弱い方に $y$ 変位します。結果として、縦部材の反力 $R$ が発生します。



以上、3つの未知数、 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $R$ を解くために次の3つの関係式が必要です。①左側の縦部材と横部材の接続部のたわみ角は同じ。②右側の縦部材と横部材の接続部のたわみ角は同じ。③左右の縦部材の変位 $y$ は同じ。

それでは、関係式を作っていきます。横部材には、力 $F$ と、曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ が働くため、接続部のたわみ角は、これらの力の足し合わせとなります。

力 $F$ による接続部のたわみ角は、式(3.44)に $x = 0$ を代入、式(3.45)に $x = L$ を代入し

$$\theta_{1a} = \frac{Fl_2(L^2 - l_2^2)}{6EI_1L} \quad (3.148)$$

$$\theta_{2a} = -\frac{Fl_1(L^2 - l_1^2)}{6EI_1L} \quad (3.149)$$

曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ による接続部のたわみ角は、式(3.114)に $w = L$ を代入し

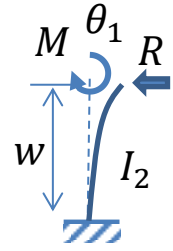
$$\theta_{1b} = \frac{L}{6EI_1}(2M_1 + M_2) \quad (3.150)$$

$$\theta_{2b} = -\frac{L}{6EI_1}(M_1 + 2M_2) \quad (3.151)$$

次に左側の縦部材に着目します。図(欄外)のように、2つの反力によって、接続部にたわみ角と変位が生じます。変位角は、式(3.31)、(3.36)より

$$\theta_1 = \frac{M_1 w}{EI_2} - \frac{Rw^2}{2EI_2} \quad (3.152)$$

$$y = \frac{M_1 w^2}{2EI_2} - \frac{Rw^3}{3EI_2} \quad (3.153)$$



続いて右側の縦部材です。上式に比べ $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ 、 $M_1 \rightarrow -M_2$ 、 $R \rightarrow -R$ 、 $I_2 \rightarrow I_3$ とすれば

$$\theta_2 = \frac{M_2 w}{EI_3} + \frac{Rw^2}{2EI_3} \quad (3.154)$$

$$y = \frac{M_2 w^2}{2EI_3} + \frac{Rw^3}{3EI_3} \quad (3.155)$$

以上で関係式①②③を作る準備が整いました。「①左側の縦部材と横部材の接続部のたわみ角は同じ」の条件 $\theta_1 = \theta_{1a} - \theta_{1b}$ に式(3.148)、(3.150)、(3.152)を代入し

$$\frac{M_1 w}{EI_2} - \frac{Rw^2}{2EI_2} = \theta_{1a} - \theta_{1b} = \frac{Fl_2(L^2 - l_2^2)}{6EI_1 L} - \frac{L}{6EI_1}(2M_1 + M_2) \quad (3.156)$$

同様に、「②右側の縦部材と横部材の接続部のたわみ角は同じ。」の条件 $\theta_2 = \theta_{2a} - \theta_{2b}$ に、式(3.149)、(3.151)、(3.154)を代入し

$$\frac{M_2 w}{EI_3} + \frac{Rw^2}{2EI_3} = \theta_{2a} = -\frac{Fl_1(L^2 - l_1^2)}{6EI_1 L} + \frac{L}{6EI_1}(M_1 + 2M_2) \quad (3.157)$$

最後に、「③左右の縦部材の変位 $y$ が同じになる条件」に、式(3.153)、(3.155)を代入し

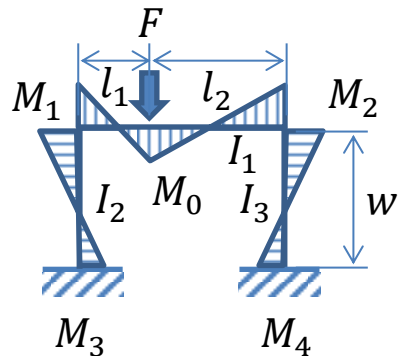
$$\frac{M_1 w^2}{2EI_2} - \frac{Rw^3}{3EI_2} = \frac{M_2 w^2}{2EI_3} + \frac{Rw^3}{3EI_3} \quad (3.158)$$

となります。以上、式(3.156)、(3.157)、(3.158)の連立方程式から $M_1$ 、 $M_2$ 、 $R$ について解きます。

物理ノートでは、勉強ノートであることにこだわって、式を立てて解く過程をできるだけ書き出してきました。ただ今回の問題は「手で解く」限度を超えてしまったため、Mathematica の解析解を示します。

以下の文字列をエクセル等に張り付けると、結果を計算できます。

F B1 セルに値を入力  
 l1 B2 セルに値を入力  
 l2 B3 セルに値を入力  
 I1 B4 セルに値を入力  
 I2 B5 セルに値を入力  
 I3 B6 セルに値を入力  
 w B7 セルに値を入力



M1

$$= (b1 * b5 * b2 * b3 * (2 * b6 * (b5 + b6) * b3 * (b2 + b3) + b4 * (b5 * b2 + 10 * b6 * b2 + 2 * b5 * b3 + 11 * b6 * b3) * b7)) / (2 * (b2 + b3) * (b5 * b6 * (b5 + b6) * (b2 + b3)^2 + b4 * (b5^2 + 11 * b5 * b6 + b6^2) * (b2 + b3) * b7 + 3 * b4^2 * (b5 + b6) * b7^2))$$

M2

$$= (b1 * b6 * b2 * b3 * (2 * b5 * (b5 + b6) * b2 * (b2 + b3) + b4 * (11 * b5 * b2 + 2 * b6 * b2 + 10 * b5 * b3 + b6 * b3) * b7)) / (2 * (b2 + b3) * (b5 * b6 * (b5 + b6) * (b2 + b3)^2 + b4 * (b5^2 + 11 * b5 * b6 + b6^2) * (b2 + b3) * b7 + 3 * b4^2 * (b5 + b6) * b7^2))$$

R

$$= (3 * b1 * b5 * b6 * b2 * b3 * (b5 * b2 + b6 * b3 + 6 * b4 * b7)) / (2 * b7 * (b5 * b6 * (b5 + b6) * (b2 + b3)^2 + b4 * (b5^2 + 11 * b5 * b6 + b6^2) * (b2 + b3) * b7 + 3 * b4^2 * (b5 + b6) * b7^2))$$

上記のように $M_1$ 、 $M_2$ 、 $R$ を解いた後、各部の曲げモーメント $M_0$ 、 $M_3$ 、 $M_4$ を求めます。

横部材の入力 $F$ の位置の曲げモーメント $M_0$ は、単純支持梁の曲げモーメント $Fl_1l_2/(l_1+l_2)$ から、縦部材の反モーメント $M_1$ 、 $M_2$ の影響分を考慮し

$$M_0 = -\frac{Fl_1l_2}{l_1+l_2} + \frac{l_1M_2 + l_2M_1}{l_1+l_2} \quad (3.159)$$

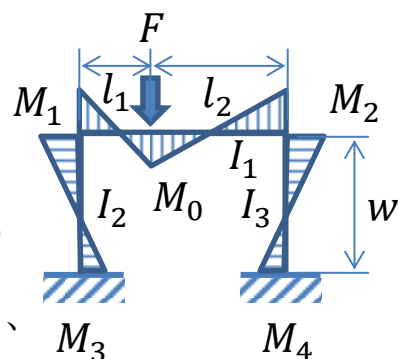
と求まります。また、縦部材の固定端の曲げモーメント $M_3$ 、 $M_4$ は

$$M_3 = M_1 - Rw \quad (3.160)$$

$$M_4 = M_2 - Rw \quad (3.161)$$

となります。

以下に $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ が異なる3条件と、単純支持梁、両端固定梁の曲げモーメントを示します。



	case1	case2	case3	単純支持	両端固定
$F$	1000	1000	1000	1000	1000
$l_1$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$l_2$	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
$w$	0.6	0.6	0.6	—	—
$I_1$	1	0.01	1	—	—
$I_2$	1	1	0.01	—	—
$I_3$	1	1	0.01	—	—
$M_1$	27.9	62.1	0.69	0	64.0
$M_2$	22.1	17.4	0.62	0	16.0
$R$	62.5	99.4	1.64	—	—
$M_0$	-53.2	-26.8	-79.3	-80	-25.6
$M_3$	-9.6	2.5	-0.29	—	—
$M_4$	-15.4	-42.3	-0.36	—	—

case 2 のように縦部材の剛性 $I_2$ 、 $I_3$ が横部材の剛性 $I_1$ に比べて高い場合、両端固定梁に近いモーメント分布となります。一方、case 3 のように横部材の剛性が縦部材に比べて高い場合は、単純支持梁に近いモーメント分布です。

実際の構造では、縦部材と横部材の間の回転剛性の影響で、上記のモーメント分布より、やや単純支持梁のモーメント分布に近づきます。



## 3.4.11. 矩形ラーメン その1

図(欄外)のような矩形ラーメンの横部材の中央部に、両側から荷重 $F$ を加えたときの曲げモーメント分布を計算します。

始めに、図(欄外)の矩形ラーメンの変形から、発生する曲げモーメントを予想してみます。縦部材には、断面2次モーメント $I_1$ 、 $I_2$ に応じた一定の曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ が発生すると考えられます。従って、図(欄外)のように、上側の横部材の曲げモーメント分布は、横部材を単純支持梁と見立て、荷重 $F$ と接続部の曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ を加えたものと考えられます。

荷重 $F$ によって生じるたわみ角 $\theta_{1F}$ 、 $\theta_{2F}$ は、右回りのたわみ角を正とすれば、式(3.83)から

$$\theta_{1F} = \frac{FL^2}{16EI_0} \quad \theta_{2F} = -\frac{FL^2}{16EI_0} \quad (3.162)$$

となります。また、曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ によって戻されるたわみ角 $\theta_{1M}$ 、 $\theta_{2M}$ は式(3.114)から

$$\theta_{1M} = \frac{L}{6EI_0}(2M_1 + M_2) \quad (3.163)$$

$$\theta_{2M} = -\frac{L}{6EI_0}(M_1 + 2M_2) \quad (3.164)$$

です。以上より、横部材の接続部のたわみ角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ は

$$\theta_1 = \theta_{1F} - \theta_{1M} = \frac{FL^2}{16EI_0} - \frac{L}{6EI_0}(2M_1 + M_2) \quad (3.165)$$

$$\theta_2 = \theta_{2F} - \theta_{2M} = -\frac{FL^2}{16EI_0} + \frac{L}{6EI_0}(M_1 + 2M_2) \quad (3.166)$$

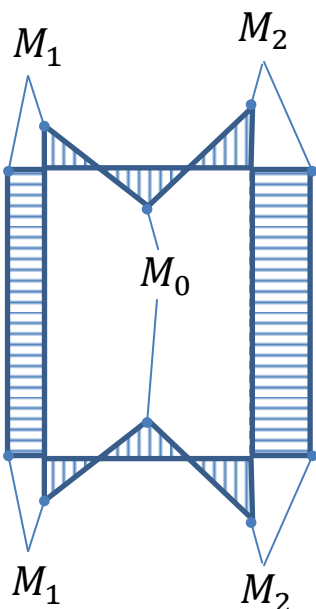
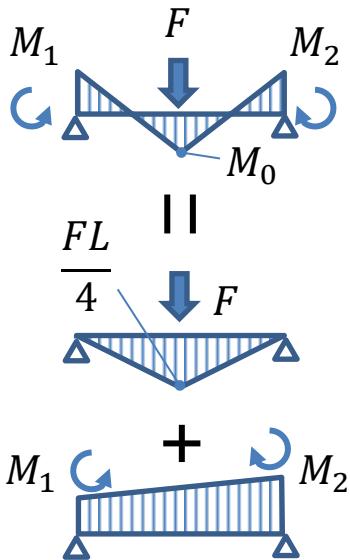
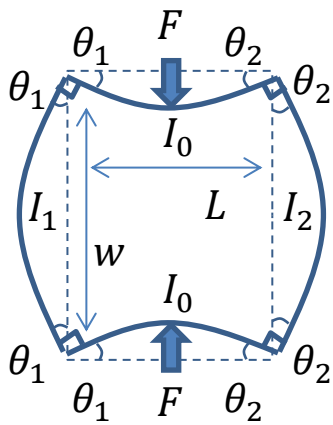
と表されます。

一方、縦部材の接続部のたわみ角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ は、横部材の接続部のたわみ角に等しいため、縦部材に働く曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ を式(3.114)に代入し

$$\theta_1 = \frac{w}{6EI_1}(2M_1 + M_1) = \frac{wM_1}{2EI_1} \quad (3.167)$$

$$\theta_2 = -\frac{w}{6EI_2}(2M_2 + M_2) = -\frac{wM_2}{2EI_2} \quad (3.168)$$

と表すことができます。



以上、4つの方程式(3.165)、(3.166)、(3.167)、(3.168)から、未知数 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を計算することができます。始めに、式(3.165)、(3.166)、(3.167)、(3.168)から、 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を消去し、部材の剛性を代表する値として、 $k_1 = EI_1/w$ 、 $k_2 = EI_2/h$ を用いれば

$$\begin{cases} \frac{FL}{16k_0} - \frac{1}{6k_0}(2M_1 + M_2) = \frac{M_1}{2k_1} \\ -\frac{FL}{16k_0} + \frac{1}{6k_0}(M_1 + 2M_2) = -\frac{M_2}{2k_2} \end{cases} \quad (3.169)$$

となります。式変形は省略しますが、上式を整理し行列の形で表せば

$$\begin{bmatrix} 3k_0 + 2k_1 & k_1 \\ k_2 & 3k_0 + 2k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{3FL}{8} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} \quad (3.170)$$

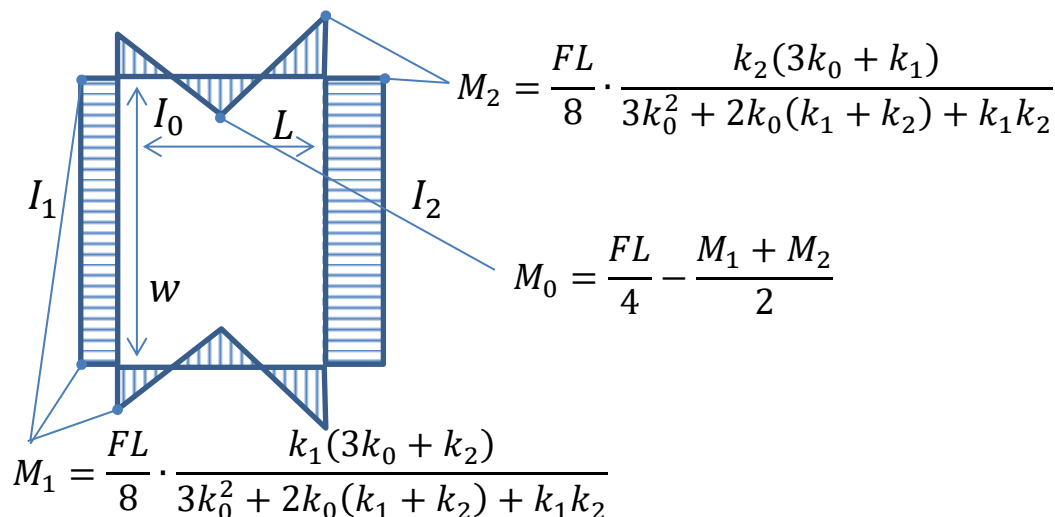
となります。ここで、上式左辺の行列式を $D$ と置けば

$$\begin{aligned} D &= (3k_0 + 2k_1)(3k_0 + 2k_2) - k_1k_2 \\ &= 9k_0^2 + 6k_0(k_1 + k_2) + 3k_1k_2 \\ &= 3\{3k_0^2 + 2k_0(k_1 + k_2) + k_1k_2\} \end{aligned} \quad (3.171)$$

従って、式(3.170)の逆行列の計算から $M_1$ 、 $M_2$ を求めると

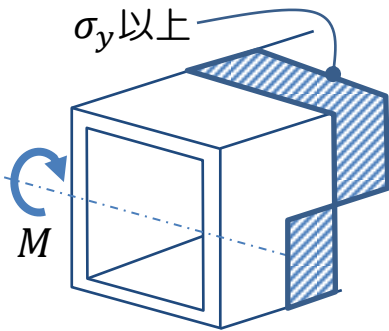
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} &= \frac{3FL}{8D} \begin{bmatrix} 3k_0 + 2k_2 & -k_1 \\ -k_2 & 3k_0 + 2k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{3FL}{8D} \begin{Bmatrix} 3k_0k_1 + 2k_1k_2 - k_1k_2 \\ -k_1k_2 + 3k_0k_2 + 2k_1k_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{FL}{8\{3k_0^2 + 2k_0(k_1 + k_2) + k_1k_2\}} \begin{Bmatrix} k_1(3k_0 + k_2) \\ k_2(3k_0 + k_1) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.172)$$

となります。以上より、矩形ラーメンの曲げモーメント分布は下図のようになります。

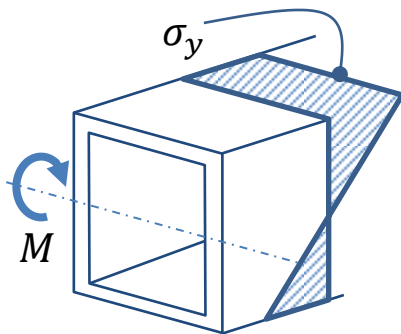


### 3.5. 断面の強度判定 弾塑性境界の応力分布

コンパクト断面  
の応力分布



弱い断面の応力分布



- 断面サイズが一定でない部位
- カルマンの有効幅以上の板幅をもつ断面
- 開き断面

断面の強度判定は、「断面が壊れる応力分布」を定義し、断面に加えた荷重がその応力分布に達するかどうかを判定することで行います。

例えば建築部材には、強度的に効率のよいコンパクト断面(compact section)という規格部材があります。コンパクト断面は曲げモーメントに対して図(欄外)のように全断面が塑性状態となる応力分布(全塑性の応力分布)になるまで壊れません。従って、予め全断面が降伏応力に達する曲げモーメント(全塑性モーメント **fully plastic moment**)を測っておけば、それを基準に断面の強度判定を行うことができます。

一方、車の構造部材では、スペース上の制約によって断面の一部が削られたり、断面形状が一定でなくコンパクト断面の要件を満たさない部分があり、全断面が塑性状態になる前に壊れる場合があります。断面の状況により、一概には言えませんが、図(欄外)のように断面の一部が降伏応力に達する応力分布(弾塑性境界の応力分布)で壊れる場合もあります。

また、強度の判定では、「壊れる」の定義もいろいろあります。例えば「断面の一部が塑性しても目に見えて変形がなければ OK」という判定を行うためには、どのような応力分布を定義すればよいのでしょうか？ おそらくは、弾塑性境界の応力分布と、全塑性の応力分布の間であると考えられます。このような場合、中間の応力分布を定義することは難しいため、例えば「弾塑性境界の応力分布の〇〇倍まで許容する」という、安全率の考え方をを用いて強度判定を行います。

この節では、弾塑性境界の応力分布を基準とする、許容応力設計法(**allowable stress design method**)について紹介します。

### 3.5.1.軸方向の応力分布

部材の長手方向を軸方向と呼び、軸方向の力を軸力と呼びます。ここでは、断面に軸力 $F$ と縦曲げモーメント $M_1$ 、横曲げモーメント $M_2$ を加えたときの断面の角の軸方向の応力 $\sigma$ を考えます。部材の軸方向の応力 $\sigma$ は、3つの力によって発生する応力の和

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_{M1} + \sigma_{M2} \quad (3.173)$$

で表すことができます。

軸力 $F$ は、断面全体に行きわたると考え

$$\sigma_F = \frac{F}{A} \quad (3.174)$$

とします。

次に、曲げモーメント $M_1$ による応力 $\sigma_{M1}$ を考えます。断面の図心から距離 $e$ 離れた場所の応力 $\sigma_{M1}$ は、式(3.19)の $y = e_1$ とし、式(3.23)を代入すれば

$$\sigma_{M1} = E e_1 \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = E e_1 \left( \frac{M_1}{EI_1} \right) = \frac{M_1}{I_1} e_1 \quad (3.175)$$

と求まります。

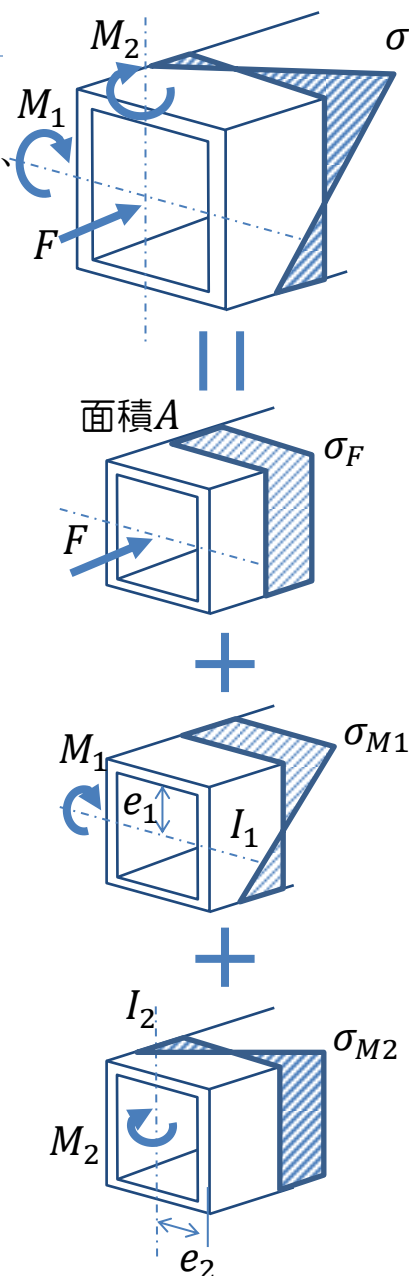
同様に曲げモーメント $M_2$ による応力 $\sigma_{M2}$ は

$$\sigma_{M2} = E e_2 \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = E e_2 \left( \frac{M_2}{EI_2} \right) = \frac{M_2}{I_2} e_2 \quad (3.176)$$

と表されます。

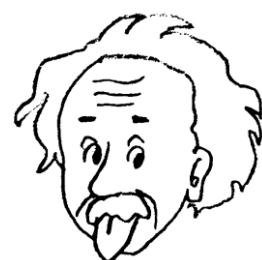
以上より、軸方向の応力分布は、式(3.173)に式(3.174)、(3.175)、(3.176)を代入し、次のように表されます。

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_1}{I_1} e_1 + \frac{M_2}{I_2} e_2 \quad (3.177)$$

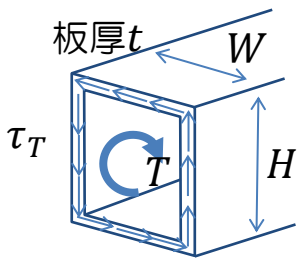


アルベルト・アインシュタイン

学べば学ぶほど、自分がどれだけ無知であるか思い知らされる。  
自分の無知に気づけば気づくほど、より一層学びたくなる。



### 3.5.2.ねじり方向の応力分布



ねじりモーメント $T$ と断面のせん断応力 $\tau_T$ のつり合いを考えます。ねじりモーメント $T$ は図(欄外)のように断面を1周するせん断応力 $\tau_T$ とつり合います。せん断応力 $\tau_T$ を断面の中心周りに積分した値が $T$ になると考えれば

$$T = 2 \left( \frac{H}{2} W t \tau_T \right) + 2 \left( \frac{W}{2} H t \tau_T \right) \quad (3.178)$$

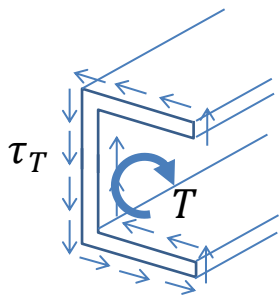
$$= 2HWt \tau_T$$

の関係が成り立ちます。ここで、せん断応力のループが断面を囲む面積を $A_0 = HW$ として上式を置き換えれば

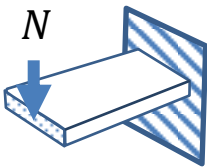
$$\tau_T = \frac{T}{2A_0 t} \quad (3.179)$$

と表され、断面のせん断応力 $\tau_T$ とねじりモーメント $T$ の関係式が得られます。

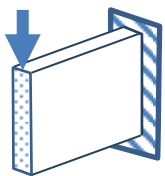
上式は矩形断面から導きましたが、任意形状の断面でも一般的に成り立ちます。せん断応力 $\tau_T$ がループする内側の面積が $A_0$ となります。従って、開き断面の場合、 $A_0$ は図(欄外)のように断面の面積そのものとなり値が小さくなります。ねじりを受ける部位で開き断面を用いる場合は注意が必要です。



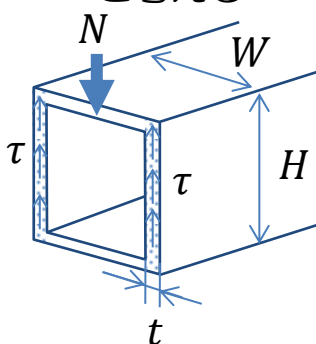
柔らかい



N 硬い



たて壁で受ける  
と考える



### 3.5.3.せん断方向の応力分布

図(欄外)のように、扁平な板に力を加える場合、せん断力 $N$ を板の厚さ方向に加えるか、幅方向に加えるかで、その剛性は大きく異なります。応力は剛性の高い所に優先的に流れるため、この考え方を矩形断面に適用すると、せん断力 $N$ はたて壁だけが受け持つと考えることができます。図(欄外)のように、せん断力 $N$ とせん断応力 $\tau_N$ のつり合い状態を考えると

$$N = 2Ht\tau_N \quad (3.180)$$

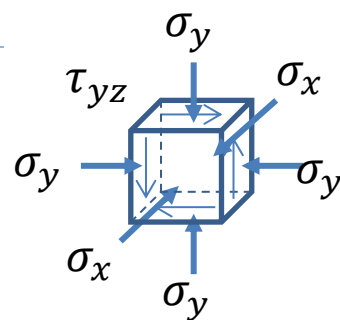
上式を変形し、せん断応力 $\tau_N$ は

$$\tau_N = \frac{N}{2Ht} \quad (3.181)$$

と求まります。

### 3.5.4. Von-Mises 応力と安全率

断面の強度判定を行うために、延性材料の破壊判定でよく用いられる、せん断ひずみエネルギー説(shear strain energy theory)をベースとした判定方法を考えます。せん断ひずみエネルギー説は、単位体積当たりのせん断ひずみエネルギーが限界を超えると材料が破壊されると仮定し、次式で定義される Von-Mises 応力



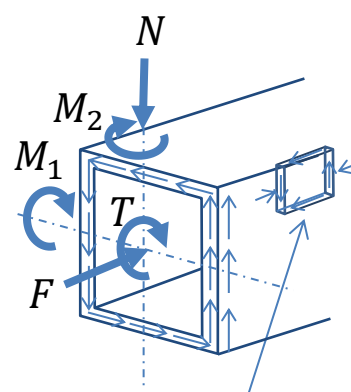
$$\sigma_v = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{2} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3.182)$$

が、降伏応力 $\sigma_y$ を超える条件

$$\sigma_v > \sigma_y \quad (3.183)$$

で材料が破壊されるという考え方です。

ここでは図(欄外)のような部材の断面の角が降伏応力を超える条件を考えます。前項までに見てきたように、図(欄外)の荷重条件での応力は、軸方向の応力 $\sigma_x = \sigma$ とせん断方向の応力 $\tau_{zx} = \tau$ だけです。従って式(3.182)は

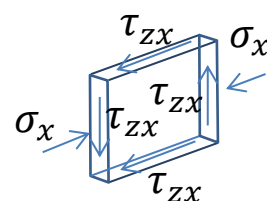


$$\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (3.184)$$

と表されます。上式に式(3.177)、(3.179)、(3.181)を代入し

x軸方向応力とxz平面のせん断応力

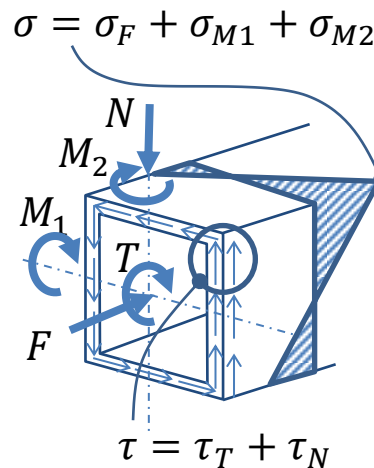
$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sqrt{\sigma^2 + 3(\tau_T + \tau_N)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{F}{A} + \frac{M_1}{I_1}e_1 + \frac{M_2}{I_2}e_2\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2A_0t} + \frac{N}{2Ht}\right)^2} \quad (3.185) \end{aligned}$$



となります。上式を破壊の条件式(3.183)に代入すると

$$\sqrt{\left(\frac{F}{A} + \frac{M_1}{I_1}e_1 + \frac{M_2}{I_2}e_2\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2A_0t} + \frac{N}{2Ht}\right)^2} > \sigma_y \quad (3.186)$$

となります。一般に断面が崩れやすい開き断面や、弾性座屈の起こる断面(カルマンの有効幅以上の板幅のある断面)では、式(3.186)に近い条件で部材が折れ曲ります。一方、建築で使われるコンパクト断面(曲げモーメントに対し、断面全体が塑性状態に達することを保証する断面サイズ、板厚、材料が規定された断面)では、断面の一部が降伏応力に達しても部材は折れません。



強度の判定基準は、「通常の操作で絶対に塑性させない」「高さ5mからの落下で2mmまでの永久変形は許す」「速度〇Km/hで道路の段差にぶつかっても折れない」など、求められる条件も様々です。

例えば「2mmの永久変形」は式(3.186)で直接評価することはできません。従って、求められる条件ごとに「目標の安全率」を決め、「目標の安全率」以上になるように断面の強度を決定することになります。

安全率は「安全率 = 基準応力 / 許容応力」と表されます。ここで基準応力を降伏応力 $\sigma_y$ 、目標の安全率を $a$ と決めれば許容応力 $\sigma_a$ は

$$\sigma_a = \frac{\sigma_y}{a} \quad (3.187)$$

となります。ここで、強度の判定基準を断面の Von-Mises 応力 $\sigma_v$ が許容応力 $\sigma_a$ 以下となることである、と定義すれば

$$\sigma_v < \sigma_a \quad (3.188)$$

です。上式に式(3.185)、式(3.187)を代入すれば

$$\sqrt{\left(\frac{F}{A} + \frac{M_1}{I_1}e_1 + \frac{M_2}{I_2}e_2\right)^2 + 3\left(\frac{T}{2A_0t} + \frac{N}{2Ht}\right)^2} < \frac{\sigma_y}{a} \quad (3.189)$$

となります。上式の両辺を $\sigma_y$ で割り、式を整理すると

$$\sqrt{\left(\frac{F}{\sigma_y A} + \frac{M_1}{\sigma_y I_1}e_1 + \frac{M_2}{\sigma_y I_2}e_2\right)^2 + 3\left(\frac{T}{\sigma_y 2A_0t} + \frac{N}{\sigma_y 2Ht}\right)^2} < \frac{1}{a} \quad (3.190)$$

$$\sqrt{\left(\frac{F}{\sigma_y A} + \frac{M_1}{\sigma_y \frac{I_1}{e_1}} + \frac{M_2}{\sigma_y \frac{I_2}{e_2}}\right)^2 + \left(\frac{T}{\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} 2A_0t} + \frac{N}{\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} 2Ht}\right)^2} < \frac{1}{a}$$

になります。ここで、断面係数 $Z_1 = I_1/e_1$ 、 $Z_2 = I_2/e_2$ 、せん断降伏応力 $\tau_y = \sigma_y/\sqrt{3}$ として上式を置きかえれば

$$\sqrt{\left(\frac{F}{\sigma_y A} + \frac{M_1}{\sigma_y Z_1} + \frac{M_2}{\sigma_y Z_2}\right)^2 + \left(\frac{T}{\tau_y 2A_0t} + \frac{N}{\tau_y 2Wt}\right)^2} < \frac{1}{a} \quad (3.191)$$

と表されます。

さらに、上式の左辺の分母を断面耐力として

$$\text{軸耐力 } EF = \sigma_y A$$

$$\text{曲げ耐力 } EM_1 = \sigma_y Z_1$$

$$\text{曲げ耐力 } EM_2 = \sigma_y Z_2 \quad (3.192)$$

$$\text{ねじり耐力 } ET = \tau_y 2A_0 t$$

$$\text{せん断耐力 } EN = \tau_y 2Ht$$

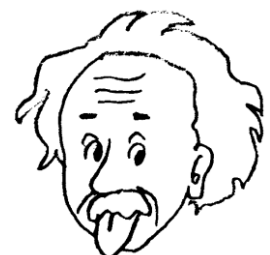
と定義します。上式の曲げ耐力 $EM_1$ 、 $EM_2$ は、一般に弾塑性境界モーメントと呼ばれます。以上より、強度の判定式は

$$\sqrt{\left(\frac{F}{EF} + \frac{M_1}{EM_1} + \frac{M_2}{EM_2}\right)^2 + \left(\frac{T}{ET} + \frac{N}{EN}\right)^2} < \frac{1}{a} \quad (3.193)$$

と表されます。上式に断面荷重（分子）と断面耐力（分母）を代入すれば、目標の安全率 $a$ 以上であるかを判定できます。

上式はせん断ひずみエネルギー説をベースとした判定式であるため、左辺=1のとき、断面の一部が降伏応力に達することを意味しています。

アルベルト・アインシュタイン  
大切なのは、疑問を持ち続けること。



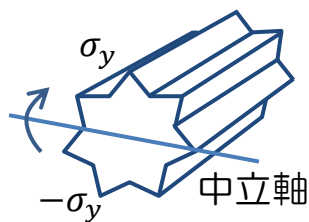


### 3.6. 断面の強度判定 全塑性の応力分布

コンパクト断面(compact section)に曲げモーメントが加わる場合の強度判定方法を紹介します。

先に述べたように、断面の強度判定は、「断面が壊れる応力分布」を定義し、断面に加わる荷重がその応力分布に達するかどうかを判断します。コンパクト断面は断面サイズに対して比較的厚板で、全断面が塑性状態（全塑性の応力分布）になるまで壊れないことを保証する断面です。

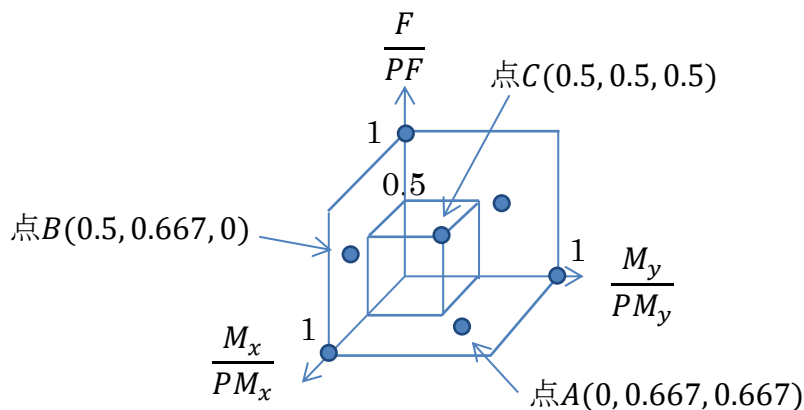
従って、予め全断面が塑性状態に達する曲げモーメント(全塑性モーメント **fully plastic moment**)を測っておけば、それを基準に断面の強度判定を行うことができます。



図(欄外)の断面に曲げモーメントを加えると、断面の上側が $\sigma_y$ 、下側が $-\sigma_y$ となり、その間に応力0のラインができます。一般に、この応力0のラインを中立軸と呼び、中立軸の位置が全塑性の応力分布を特徴づけます。

従って、断面が取り得る中立軸をすべて書き出し、定まる応力分布を積分すれば、断面が発生できる荷重（軸力、曲げモーメント）の組み合わせを知ることができます。

この節では簡単な例として、正方形断面が全塑性状態で発生できる軸力と曲げモーメントの組み合わせをいくつか計算し、下図のような3次元グラフにプロットします。断面に働く荷重がプロット点の内側ならば、コンパクト断面は全塑性に達せず、「壊れない」と判断できます。



### 3.6.1. 中立軸が断面に存在しない場合

始めに中立軸が断面内に存在しない場合、すなわち、断面の全てが降伏応力 $\sigma_y$ に達する状況を考えます。図(欄外)の断面が $x$ 軸、 $y$ 軸周りに発生する曲げモーメント $M$ は、明らかに

$$M_x = \oint_A y \sigma_y dA = 0 \quad (3.194)$$

$$M_y = \oint_A x \sigma_y dA = 0$$

です。一方、断面は最大の軸力を発生し、これを全塑性軸力 $PF$ (fully plastic force)と呼びます。正方形断面の幅 $b$ 、板厚 $t$ とすれば

$$PF = 4bt\sigma_y \quad (3.195)$$

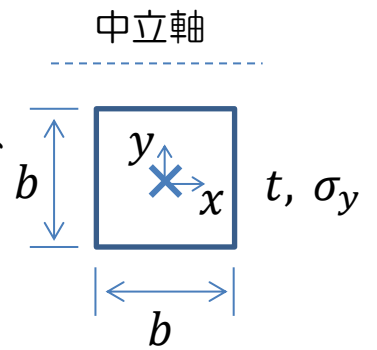
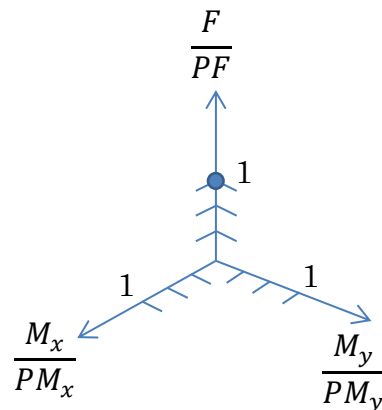
となり、断面に働く軸力 $F$ に対し

$$F < PF$$

$$\therefore \frac{F}{PF} < 1 \quad (3.196)$$

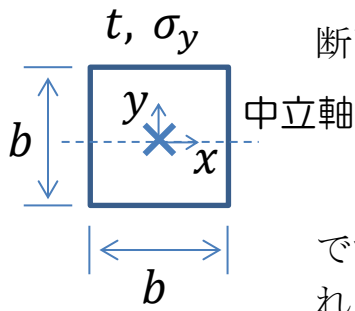
の条件ならば、断面は全塑性に達しないと判断できます。

上式を3次元グラフにプロットします。座標値 $(F/PF, M_x/PM_x, M_y/PM_y) = (1, 0, 0)$ は、軸力のみを断面に加えた場合の、全塑性の条件を表します。



### 3.6.2. 中立軸が図心を通る場合

図（欄外）のように、中立軸が断面の図心を通る場合、断面が発生する軸力 $F$ は、明らかに



$$F = \oint_A \sigma_y dA = 0 \quad (3.197)$$

です。一方、断面は最大の曲げモーメントを発生し、これを全塑性モーメント $PM$ (fully plastic moment)と呼びます。

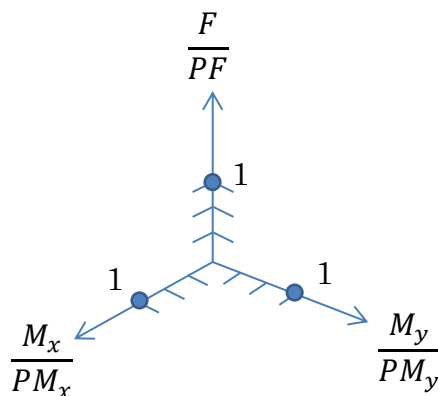
このとき、図心を通る $x$ 軸、 $y$ 軸周りに発生できる全塑性モーメント $PM$ は

$$\begin{aligned} PM &= 2 \left( bt\sigma_y \cdot \frac{b}{2} + 2 \int_0^{\frac{b}{2}} yt\sigma_y dy \right) \\ &= b^2 t\sigma_y + 4t\sigma_y \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{b}{2}} \\ &= b^2 t\sigma_y + \frac{b^2 t\sigma_y}{2} = \frac{3}{2} b^2 t\sigma_y \end{aligned} \quad (3.198)$$

となり、断面に働く曲げモーメント $M$ に対し

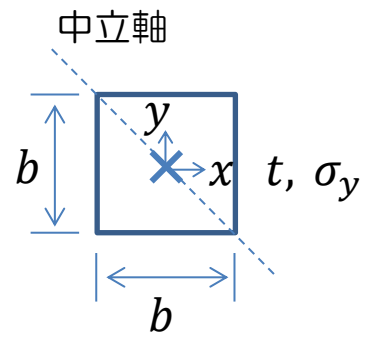
$$\therefore \frac{M}{PM} < 1 \quad (3.199)$$

の条件で断面は全塑性に達しないと判断できます。座標値 $(F/PF, M_x/PM_x, M_y/PM_y) = (0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ を3次元グラフにプロットします。



次に、中立軸が45度方向に傾く場合の曲げモーメント  $M_x$ 、 $M_y$  を計算します。曲げモーメント  $M_x$  は  $x$  軸周りの積分から

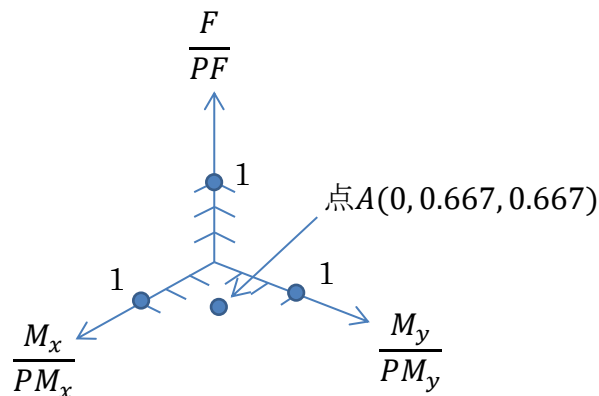
$$\begin{aligned} M_x &= 2 \int_0^b \frac{b}{2} t \sigma_y dx \\ &= b t \sigma_y [x]_0^b \\ &= b^2 t \sigma_y \end{aligned} \quad (3.200)$$



と求まります。同様に  $M_y = b^2 t \sigma_y$  です。3次元グラフにプロットするために  $PM$  で割って座標を求めると

$$\frac{M_x}{PM} = \frac{M_y}{PM} = \frac{b^2 t \sigma_y}{\frac{3}{2} b^2 t \sigma_y} = 0.667 \quad (3.201)$$

となります。以上より、 $(F/PF, M_x/PM_x, M_y/PM_y) = (0, 0.667, 0.667)$  を点Aとして3次元グラフにプロットします。



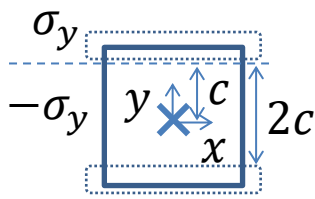
ヨハン・クライフ (1947-2016)

「自分を誇りに思うことはあってもいい、ただ先の段階に進むとき、自分への誇りは妨げになる。うぬぼれが強くなるからね。私は楽しんだからこそ、素晴らしいキャリアを築くことができた。」

「なしとげたいことに時間をかけ、強い意志を持って実行する。」

「ボールと友達であるかのように接する・・・サッカーで最も重要なのは、ファンも選手も楽しむことなんだ。」

### 3.6.3. 中立軸が図心からずれる場合



図（欄外）のように、中立軸が断面の図心から $c$ 離れた場合の断面発生荷重を計算します。

図（欄外）の点線で囲った範囲（ $x$ 軸を挟んで対となる $\sigma_y$ 、 $-\sigma_y$ の範囲）は、軸力 $F$ に寄与しないため

$$F = 4ct\sigma_y \quad (3.202)$$

となります。一方、曲げモーメント $M_x$ に寄与するのは $x$ 軸を挟んで対となる $\sigma_y$ 、 $-\sigma_y$ の範囲だけであるため

$$\begin{aligned} M_x &= 2b \frac{b}{2} t\sigma_y + 4 \int_c^{\frac{b}{2}} yt\sigma_y dy \\ &= b^2 t\sigma_y + 4t\sigma_y \left[ \frac{y^2}{2} \right]_c^{\frac{b}{2}} \\ &= b^2 t\sigma_y + \left( \frac{b^2}{2} - 2c^2 \right) t\sigma_y \\ &= \left( \frac{3}{2} b^2 - 2c^2 \right) t\sigma_y \end{aligned} \quad (3.203)$$

です。また同様に、曲げモーメント $M_y$ に寄与するのは $y$ 軸を挟んで互いに対となる $\sigma_y$ 、 $-\sigma_y$ だけであるため $M_y = 0$ 。

従って、中立軸のずれ量 $c$ に対して断面が発生できる荷重( $F, M_x, M_y$ )の組み合わせは

$$(4ct\sigma_y, \left( \frac{3}{2} b^2 - 2c^2 \right) t\sigma_y, 0) \quad (3.204)$$

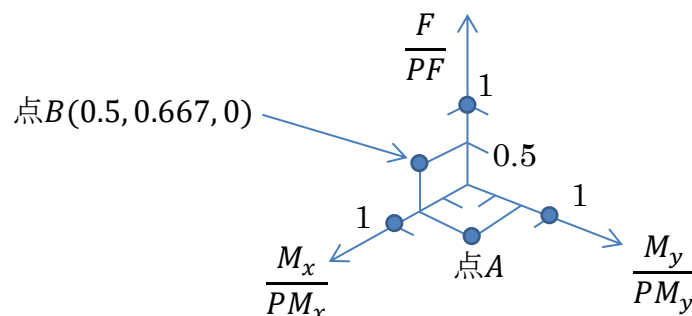
となります。例えば $c = b/2$ のとき

$$(2bt\sigma_y, b^2 t\sigma_y, 0) \quad (3.205)$$

となり、3次元グラフにプロットするために、 $PF = 4bt\sigma_y$ 、 $PM_x = 3b^2 t\sigma_y/2$ で割ると

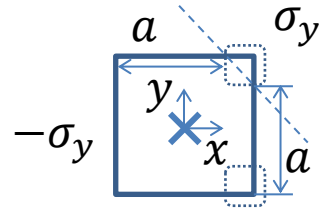
$$(0.5, 0.667, 0) \quad (3.206)$$

となり、これを点 $B$ とします。



図（欄外）のように、中立軸が断面の角から $a$ 離れた場合の断面発生荷重を計算します。

図（欄外）の点線で囲った範囲（ $x$ 軸を挟んで互いに対となる $\sigma_y$ 、 $-\sigma_y$ の範囲）は、軸力 $F$ に寄与しないため、全体の面積 $4bt$ から破線の範囲を引いて



$$F = \{4bt - 4(b-a)t\}\sigma_y = 4at\sigma_y \quad (3.207)$$

となります。一方、曲げモーメント $M_x$ に寄与するのは $x$ 軸を挟んで対となる $\sigma_y$ 、 $-\sigma_y$ だけであるため

$$\begin{aligned} M_x &= 2(b-a)\frac{b}{2}t\sigma_y + 2\int_{-\frac{b}{2}+a}^{\frac{b}{2}} yt\sigma_y dy \\ &= (b^2 - ab)t\sigma_y + 2t\sigma_y \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{b}{2}+a}^{\frac{b}{2}} \\ &= (b^2 - a^2)t\sigma_y \end{aligned} \quad (3.208)$$

となります。従って、中立軸のずれ量 $a$ に対して断面が発生できる荷重 $(F, M_x, M_y)$ の組み合わせは

$$(4at\sigma_y, (b^2 - a^2)t\sigma_y, (b^2 - a^2)t\sigma_y) \quad (3.209)$$

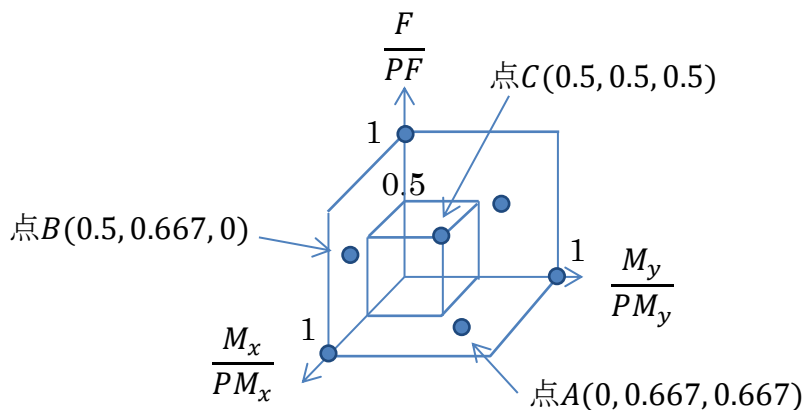
となります。例えば $a = b/2$ のとき

$$(2bt\sigma_y, \frac{3}{4}b^2t\sigma_y, \frac{3}{4}b^2t\sigma_y) \quad (3.210)$$

となり、3次元グラフにプロットするために、 $PF = 4bt\sigma_y$ 、 $PM = 3b^2t\sigma_y/2$ で割ると

$$(0.5, 0.5, 0.5) \quad (3.211)$$

となり、これを点 $C$ とします。



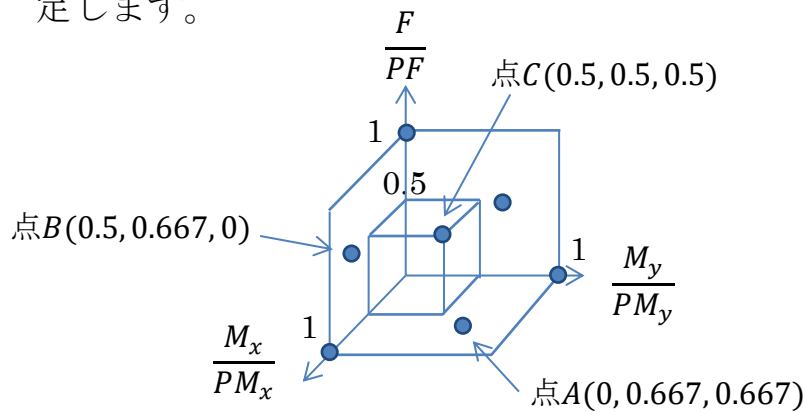
断面に働く荷重を全塑性軸力 $PF$ 、全塑性モーメント $PM$ で割った座標値が上図の7点の、およそ内側となれば、断面は全塑性状態に達しないと判断できます。

### 3.6.4. 近似的な全塑性の判定式

以上求めた7点を通る曲面の式を、全塑性の判定式として用いる方法を考えます。ここでは、自動車技術会の論文「車体初期設計に用いるための全塑性の判定式に関する検討」の内容に倣い、判定式の形を

$$\left(\frac{F}{PF}\right)^n + \sqrt[m]{\left(\frac{M_x}{PM_x}\right)^m + \left(\frac{M_y}{PM_y}\right)^m} = 1 \quad (3.212)$$

と置き、前節までに求めた代表点を通るように $n$ 、 $m$ を決定します。



始めに点Aを通る $m$ を求めます。上式に $(F/PF, M_x/PM_x, M_y/PM_y) = (0, 0.667, 0.667)$ を代入し

$$\begin{aligned} 0 + \sqrt[m]{(0.667)^m + (0.667)^m} &= 1 \\ (0.667)^m + (0.667)^m &= 1 \\ \therefore m &= 1.70951 \end{aligned} \quad (3.213)$$

と求まり、判定式は

$$\left(\frac{F}{PF}\right)^n + \sqrt[1.71]{\left(\frac{M_x}{PM_x}\right)^{1.71} + \left(\frac{M_y}{PM_y}\right)^{1.71}} = 1 \quad (3.214)$$

となります。さらに上式に、 $(F/PF, M_x/PM_x, M_y/PM_y) = (0.5, 0.5, 0.5)$ を代入し

$$\begin{aligned} (0.5)^n + \sqrt[1.71]{(0.5)^{1.71} + (0.5)^{1.71}} &= 1 \\ (0.5)^n + 0.75 &= 1 \\ (0.5)^n &= 0.25 \\ \therefore n &= 2 \end{aligned} \quad (3.215)$$

と求められます。以上より判定式は

$$\left(\frac{F}{PF}\right)^2 + \sqrt[1.71]{\left(\frac{M_x}{PM_x}\right)^{1.71} + \left(\frac{M_y}{PM_y}\right)^{1.71}} = 1 \quad (3.216)$$

となります。

ここで上式の導出で使わなかった、点 $B(F/PF, M_x/PM_x, M_y/PM_y) = (0.5, 0.667, 0)$ を上式に代入すると

$$(0.5)^2 + \sqrt[1.71]{(0.667)^{1.71} + (0)^{1.71}} = 1 \quad (3.217)$$

$$0.9166667 = 1$$

となり、曲面に一致しないことがわかります。

3次元グラフソフトで判定式を表示すると分かるのですが、点 $B$ は判定式の曲面の内側に位置します。これは、事実全塑性の点 $B$ を「判定式上、全塑性でない」と判断することを意味し、事実と反します。

従って、正方形断面の全塑性の安全側の判定式として

$$\left(\frac{F}{PF}\right)^2 + \sqrt[1.71]{\left(\frac{M_x}{PM_x}\right)^{1.71} + \left(\frac{M_y}{PM_y}\right)^{1.71}} < 0.917 \quad (3.218)$$

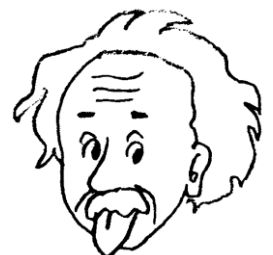
を採用することができます。

ここでは上式の右辺の閾値  $0.917$  を、単に点 $B$ 、1点のみから求めましたが、論文「車体初期設計に用いるための全塑性の判定式に関する検討」の Table 1 によれば、閾値  $0.913$  が、全ての荷重条件下で安全側となる閾値であることが示されています。

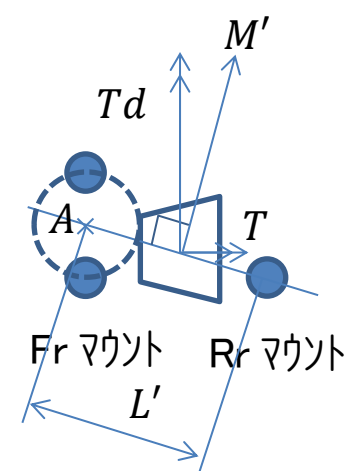
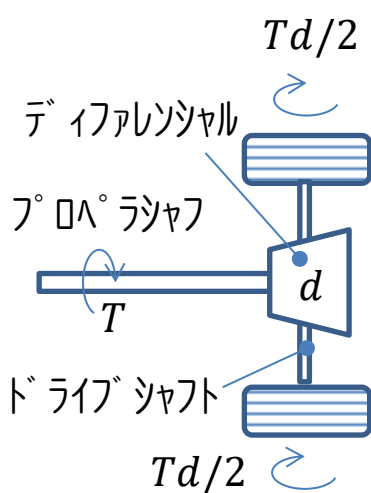
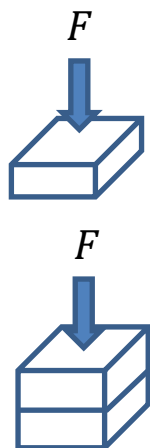
また導出から明らかなように、閾値  $0.917$  は、曲げモーメントのみ働く正方形断面に対しては、厳しすぎる値です。 $F/PF = 0$ の場合には、右辺の閾値を  $1$  として用います。

アルベルト・アインシュタイン

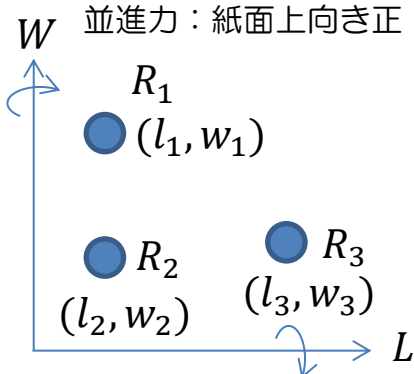
死ぬということは、モーツァルトを聴けなくなる事だ。







モメント：時計回り正  
並進力：紙面上向き正



### 3.7. ゴム部材の配置、耐久とボリューム

パワーユニットやサスペンションを支持するゴム部品（以下、マウント）の配置、耐久とボリュームの関係を考えます。マウントの耐久性は、繰り返し入力される荷重 $F$ によるひずみ $\delta$ の大きさに関係します。ひずみ $\delta$ が小さいほど、壊れるまでの耐久回数が増えます。

例えば、振動騒音などの要求から柔らかいマウントで支持したい場合、マウントボリュームをとることで柔らかくできます。図（欄外）のように力 $F$ のひずみ $\delta$ を基準とします。ボリュームを力方向に2倍とれば、ひずみ $\delta$ は同じで、ばね定数 $k$ は半分になります。

このようにスペースを確保することで、ばねを柔らかくできます。一方、スペースを犠牲にしない別の方法もあります。マウント荷重 $F$ を小さくし、耐久性を上げれば、ばねを柔らかくできます。（本節の内容は、**MoterFan illustrated No153 p52-55** の記事を参考にしました。）

#### 3.7.1. ユニット支持マウントに働く荷重

ディファレンシャル（以下デフ）にはプロペラシャフトトルク反力 $T$ と、ドライブシャフトトルク反力 $Td$ が働きます。デフをバランスよく支えることで、デフマウント荷重を小さくし、ボリュームを小さくできます。

図（欄外）のように、合モーメント $M'$ に直角方向に2点で支えれば、同じ荷重 $R_3$ で支持することができます。

$$R_3 = \frac{M'}{L'} = \frac{\sqrt{T^2 d^2 + T^2}}{L'} \quad (3.219)$$

一方、Fr側を2つのマウントで支える場合、元の点Aの同心円上にマウントを配置すれば、Fr側2つは同じ荷重で支えられると推察されます。確認してみましょう。並進力とモーメントのつり合いから3式が立ちます。

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0 \quad (3.220)$$

$$R_1 w_1 + R_2 w_2 + R_3 w_3 + T = 0 \quad (3.221)$$

$$-R_1 l_1 - R_2 l_1 - R_3 l_3 + Td = 0 \quad (3.222)$$

$R_1 = R_2$ となる条件を求めるため、上式3つに

$R_1 = R_2 = R$ を代入すれば

$$2R + R_3 = 0 \quad (3.223)$$

$$-R(w_1 + w_2) - R_3 w_3 = T \quad (3.224)$$

$$2Rl_1 + R_3 l_3 = Td \quad (3.225)$$

です。式(3.223)より  $R_3 = -2R$  を式(3.224)、(3.225)に代入すれば

$$-R(w_1 + w_2) + 2Rw_3 = T \quad (3.226)$$

$$2Rl_1 - 2Rl_3 = Td \quad (3.227)$$

となります。式(3.226)を式(3.227)に代入し整理すれば

$$d = \frac{2Rl_1 - 2Rl_3}{T} = \frac{2Rl_1 - 2Rl_3}{-R(w_1 + w_2) + 2Rw_3} = \frac{l_3 - l_1}{\frac{w_1 + w_2}{2} - w_3} \quad (3.228)$$

以上、R r マウント位置から、ギア比  $d$  方向に点A (F r マウント 2つの中央) を配置すれば  $R_1 = R_2$  となることが分かりました。

### 3.7.2.サブフレーム支持マウントに働く荷重

サスペンションを支えるサブフレームのマウント荷重を小さくする条件を求めます。

図(欄外)のように、接地荷重  $F$ 、アーム比  $\alpha$  とすれば、ばね反力  $F/\alpha$  が発生します。この2つの力は、側面から見た図(欄外)において、サブフレームに加わる2つの力(モーメント  $Fl_2$  と並進力  $F_0$ ) に置き換えられます。

並進力  $F_0$  は、ばね反力  $F/\alpha$  から、モーメント  $Fl_2$  に含めた  $F$  を差し引いて

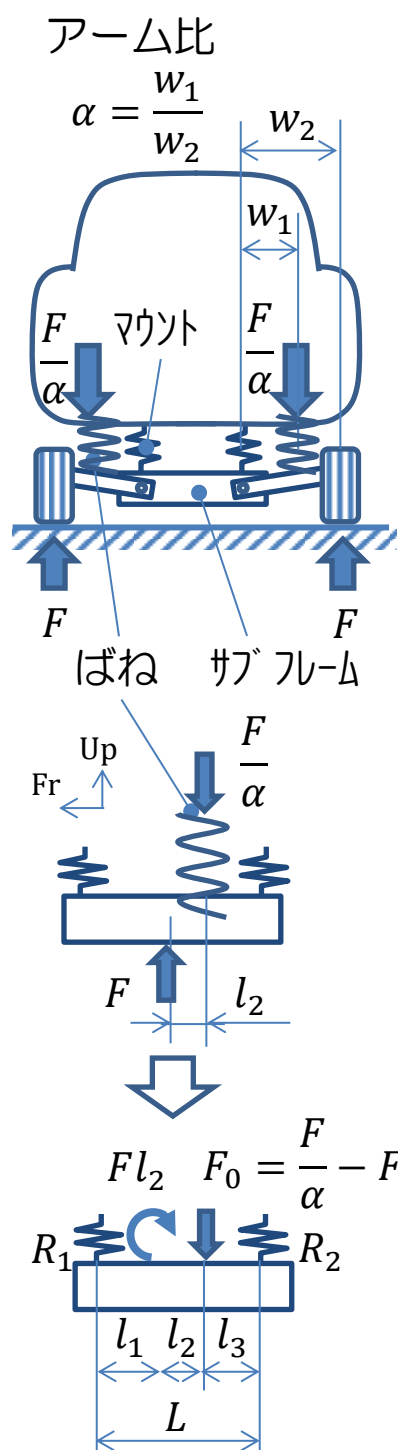
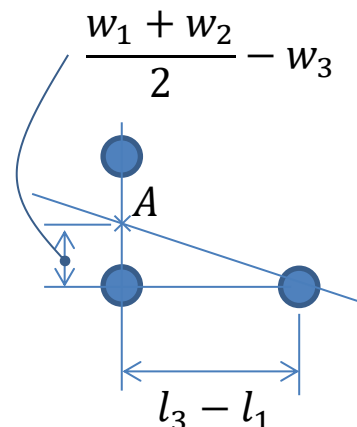
$$F_0 = \frac{F}{\alpha} - F = F \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) = F \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (3.229)$$

と表されます。

マウントに働く荷重を計算する準備が整いました。まず、F r マウントの荷重  $R_1$  は、並進力  $F_0$  による荷重から、モーメント  $Fl_2$  による荷重を引いて

$$\begin{aligned} R_1 &= F_0 \cdot \frac{l_3}{L} - \frac{Fl_2}{L} \\ &= F \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{l_3}{L} - \frac{Fl_2}{L} \end{aligned} \quad (3.230)$$

となります。一方、R r マウントの荷重  $R_2$  は



$$\begin{aligned}
 R_2 &= F_0 \cdot \frac{l_1 + l_2}{L} + \frac{Fl_2}{L} \\
 &= F \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{l_1 + l_2}{L} + \frac{Fl_2}{L}
 \end{aligned}
 \tag{3.231}$$

です。上式モーメント $Fl_2/L$ の正負から、R r マウント荷重が常に大きくなることが予測されます。

ここでは、R r マウントの荷重を小さくする条件として、R r マウント荷重をF r マウント荷重並みに下げることが狙いとし $R_1 = R_2$ の条件を求めます。

$$R_1 = R_2$$

$$F \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{l_3}{L} - \frac{Fl_2}{L} = F \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{l_1 + l_2}{L} + \frac{Fl_2}{L}$$

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot l_3 - l_2 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot (l_1 + l_2) + l_2$$

$$(1 - \alpha)l_3 - \alpha l_2 = (1 - \alpha)(l_1 + l_2) + \alpha l_2 \tag{3.232}$$

$$(1 - \alpha)(l_3 - l_1) = 2\alpha l_2 + l_2 - \alpha l_2$$

$$(1 - \alpha)(l_3 - l_1) = l_2(1 + \alpha)$$

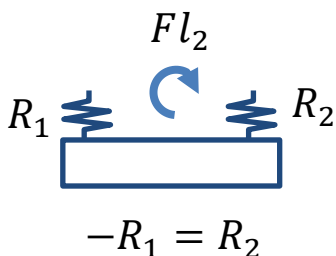
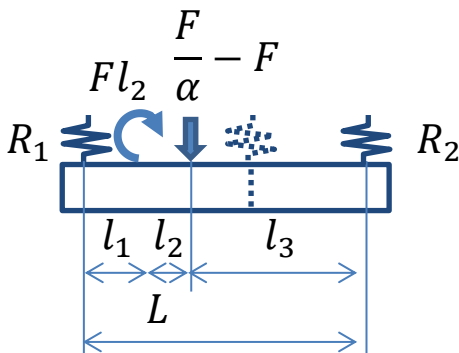
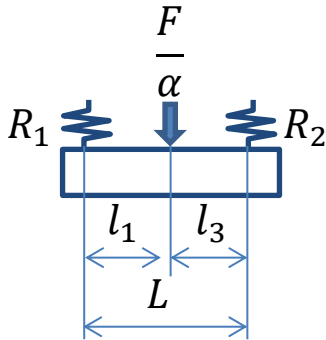
$$l_3 - l_1 = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} l_2$$

$$l_3 = l_1 + \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} l_2$$

上式より、例えば $l_2 = 0$ （モーメント $Fl_2 = 0$ ）にして、中央で支持（ $l_3 = l_1$ ）しなさい、という至極当然の答えが得られます。一方、 $l_2 \neq 0$ でモーメントが発生する場合、上式の通り、 $l_3$ を大きくする必要があります。

次にアーム比の影響を見てみます。例えば極端な例として上式にアーム比 $\alpha = 1$ を代入すると、 $l_3 = \infty$ が $R_1 = R_2$ の条件となります。これは非現実的です。

しかし、そもそもアーム比 $\alpha = 1$ の場合、サブフレームに働く力は（式(3.229)より並進力 $F_0 = 0$ ）、モーメント $Fl_2$ のみとなり、 $l_1, l_2, l_3$ がどのような値でも、常に $-R_1 = R_2$ です。マウント荷重の正負を無視すれば、アーム比 $\alpha = 1$ もR r マウント荷重が小さい条件です。至極当然のことですが、式で確認してみます。



$$\begin{aligned}
 -R_1 &= R_2 \\
 -F \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{l_3}{L} + \frac{Fl_2}{L} &= F \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{l_1+l_2}{L} + \frac{Fl_2}{L} \\
 -\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot l_3 + l_2 &= \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot (l_1+l_2) + l_2 \quad (3.233) \\
 -(1-\alpha)l_3 + \alpha l_2 &= (1-\alpha)(l_1+l_2) + \alpha l_2 \\
 -(1-\alpha)l_3 &= (1-\alpha)(l_1+l_2) \\
 (1-\alpha)(l_1+l_2+l_3) &= 0
 \end{aligned}$$

上式より、アーム比 $\alpha = 1$ のとき、 $l_1 + l_2 + l_3$ がどのような値であっても、 $-R_1 = R_2$ となると確認できました。

以上、アーム比 $\alpha=1$ にする、 $l_2$ を小さくする、 $l_3$ を大きくすれば、R r マウント荷重を小さくできます。

## 参考図書

### 嵯峨晃「構造力学Ⅱ」

梁の不静定問題に特化した内容。たわみ角法、マトリックス変位法について詳しく解説。通常、材料力学や構造力学で軽く説明される範囲にフォーカスしためずらしい本だと思います。

### 松井千秋「建築鉄骨構造」

7章から10章が有用。断面の応力状態や、塑性についての考え方の初歩が纏めてあります。


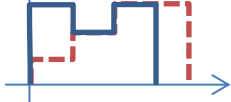
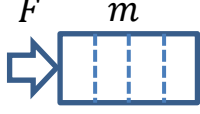
### 「座屈設計ガイドライン」 土木学会

断面の強度の判定式がたくさん載っています。参考文献リストから、その原著論文を一網打尽に集めることができました。

「車体初期設計にもちいるための全塑性の判定式に関する検討」自動車技術会 2015 秋季大会 講演論文



## 4. 衝突の式

運動エネルギー と仕事 	拘束装置を活か す車の変形荷重 	車の慣性力 
折りたたむ力学	衝突	

車の衝突現象は物理的にどう扱えばよいでしょうか？ 衝突現象を実感する機会がめったにないため、感覚的な理解から、こう扱えばよい！、ということ、なかなか難しいと思います。

物理ノートでは、まず始めに、エネルギーの考え方を使って衝突現象の概要をつかんだ後、高校物理を出発点にして、次の5つの要素を順に考えたいと思います。

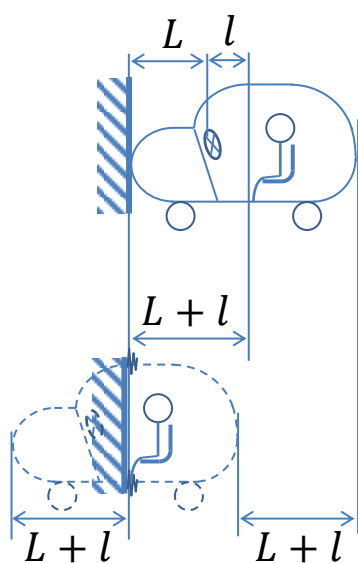
1. 物の慣性力（加速度）を考慮する。
2. 時間とともに外力が変化する。
  - ・相手と接する位置、潰れる場所は時々刻々と変化
  - ・接している場所の拘束条件は変化する
  - ・柔らかく支持された人、エンジンなどの慣性力は、衝突初期はゼロ
3. 時間とともに車の構造が変化する。
 

車の骨格構造が折れたり、潰れたりすると、構造の剛性バランスが変化し、力の伝達経路が変化する。
4. 時間とともに車の質量が変化する。
 

潰れた部分は、速度が0となるため、動いている車の質量は徐々に減っていく。
5. 衝突速度に応じて、材料の物性値が変化する。
 

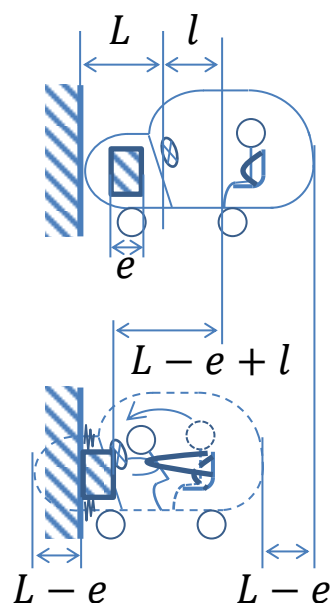
変形速度が速いほど、材料の見かけの降伏応力が高くなる。

#### 4.1. 運動エネルギーと仕事



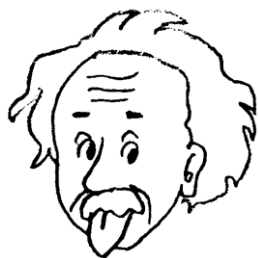
車の運動エネルギーは車が潰れることで吸収されます。このとき、人を傷つけないためには、第一に人の生存空間、客室が潰れないことが重要です。そして、客室の生存空間を十分に確保した上で、人を客室内で安全に止めることが重要になります。

このとき、小さな荷重で人がゆっくり止まることができれば、子供から大人まで安心です。ゆっくり止まるためには、減速するための距離が必要になります。車の先端が壁にぶつかったときを衝突現象の始まりと考えると、人が安全に止まるための距離の最大値は、人の位置から壁までの距離 $L+l$ になります。人と壁に焦点を絞れば、人が壁にぶつかる前に、シートベルトの荷重で人の速度をゼロにできればOKということになります。



従って、車の先端から人までの距離 $L+l$ の大きな車は衝突性能のポテンシャルの高い車であると言えます。また、そのポテンシャルを引き出すためには、 $L$ の区間を無駄なく潰すことが重要となります。

ただし、図(欄外)のように、エンジンなどの硬いユニットは客室内に侵入し、人の生存空間を脅かすため、生存空間確保の観点から、車を潰せる最大距離は $L-e$ 、人が減速するための距離は $L-e+l$ となります。従って、硬いユニットをいかに小さくできるか、どのように配置するか、ということも衝突性能を考える上で重要になります。



アルベルト・アインシュタイン

私はもし物理学者になっていなかったら、音楽家になっていたことでしょう。私はよく音楽のようにものを考え、音楽のように白昼夢を見、音楽用語で人生を理解します。私は人生のほとんどの喜びを、音楽から得ています。

### 4.1.1.車の衝突のイメージ

車の衝突で起きる物理現象の論点を整理するために、まずは、車の衝突をイメージしてみます。

やむを得ず壁に激突してしまいました。あなたにとっては目の前のステアリングや操作パネルが凶器です(欄外①)。これにぶつかるということは、車の中にいながら、車に轢かれるのと同じことです。命に関わるため、なんんとしても回避しなくてはなりません。

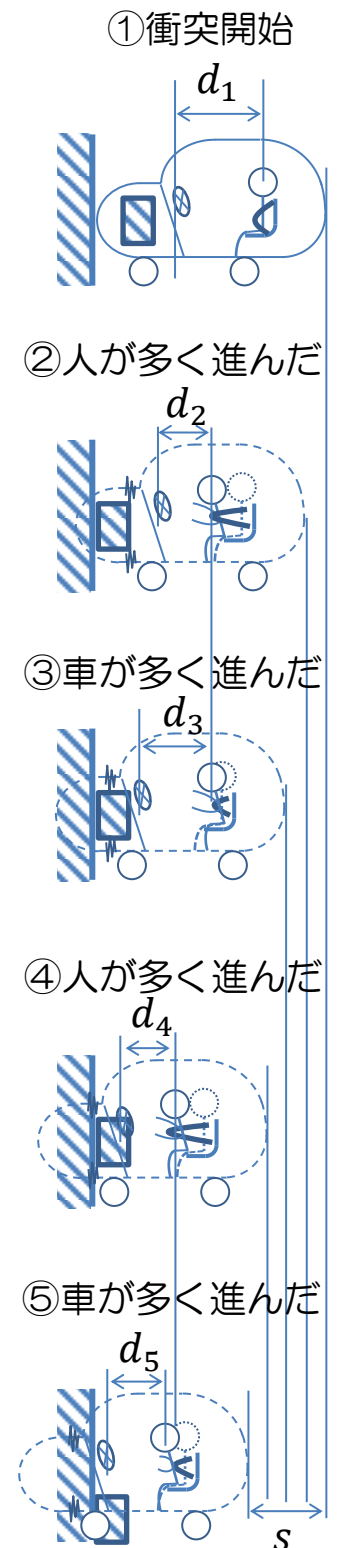
操作パネルまでの限られたスペース $d_1$ を、体は前に進んでいきます(欄外②)。なるべく早く止まらないと、そう思った矢先、シートベルトのたるみが自動的に巻き取られ、あなたの体を強力な力で締め付けました。鎖骨が痛い、少し心配ですが、操作パネルとの距離の縮まり具合は少し和らいだようです(欄外③)。

安心したのもつかの間、シートベルトが伸びるにしたがい、鎖骨の痛みが激しくなってきました。操作パネルも目前に迫っています(欄外④)。そのとき、車の前の方でガタン、という音がし、操作パネルは体から離れていきました。締めつけていたシートベルトの力も少し和らいだようです(欄外⑤)。

上記のように、人から操作パネルまでの距離 $d_1 \sim d_5$ は、車の潰れる荷重とシートベルトの荷重の大小によって、車が多く進んだり、人が多く進んだり、一進一退の攻防を繰り返します。

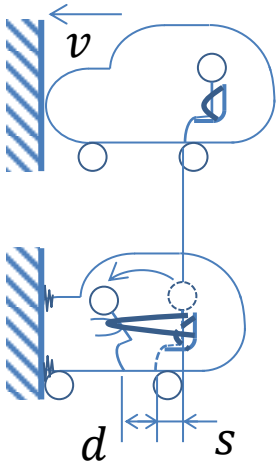
また、例えばエンジンを落とす、といった離れ業を行えば、人が安全に減速するためのスペースを一気に増やすことも可能になります。

次項では、衝突で起こるこれらの現象のメカニズムを簡単なエネルギーの式で確認していきます。





## シートベルトの仕事

4.1.2.車の変形量 $s$ と人の客室内移動量 $d$ 

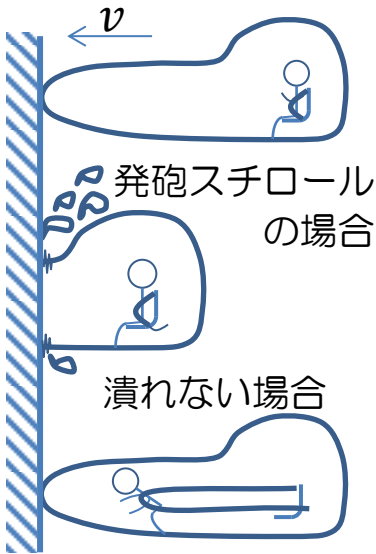
前項で考えたイメージを簡単なエネルギーの式で確認してみます。

質量 $M$ の車が速度 $v$ で剛壁に衝突した時の車の変形量を $s$ 、変形荷重を $F$ とします。また、人の質量を $m$ とし、シートベルトの荷重 $f$ は衝突開始から終了まで人と車に作用し続け、距離 $d$ 伸びたとします（以下、距離 $d$ を人の客室内移動量 $d$ と呼びます）。図(欄外)のように、人は衝突開始から終了までに距離 $s + d$ 動くため、人の運動エネルギーとシートベルトの仕事のつり合いは

$$\frac{1}{2}mv^2 = f(s + d) \quad (4.1)$$

と表されます。上式より人の運動エネルギーは一定であるため、車の変形量 $s$ が増えれば人の客室内移動量 $d$ は小さくなります。

一見、不思議に感じますが、例えば発砲スチロールの車が壁に衝突する場合、シートベルトがあまり伸びないことが想像できるのではないのでしょうか。逆に、車が全く潰れずに瞬時に止まった場合( $s = 0$ )、人の運動エネルギーは全てシートベルト荷重 $f$ と人の客室内移動量 $d$ による仕事で吸収することになります。



次に、車の運動エネルギーを考えます。人を減速させるシートベルトの荷重 $f$ の反力は、車の変形荷重 $F$ と逆向きに働くため

$$\frac{1}{2}Mv^2 = (F - f)s \quad (4.2)$$

の関係となります。上式を変形し車の変形量 $s$ は

$$s = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{F - f} \quad (4.3)$$

となります。通常 $F > f$ です。上式の分母より、 $F$ が一定の場合、シートベルトの荷重 $f$ が大きいほど、変形量 $s$ が増加することがわかります。これは、人の運動エネルギーを車が吸収する、と考えることができます。

次に人の客室内移動量 $d$ を求めます。式(4.1)を変形し

$$\frac{1}{2}mv^2 = fs + fd$$

$$d = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{f} - s \quad (4.4)$$

と表します。

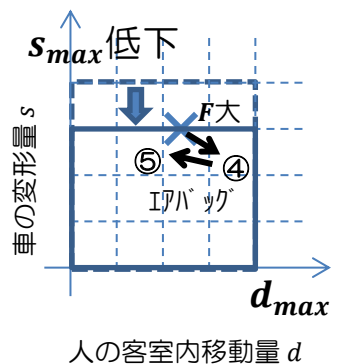
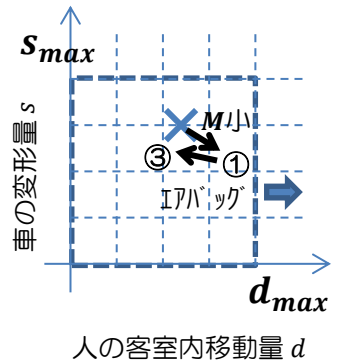
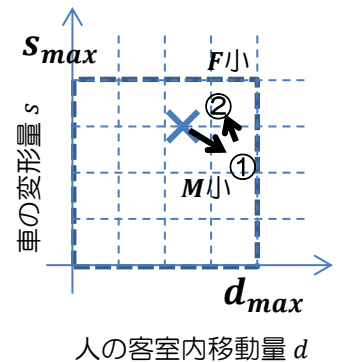
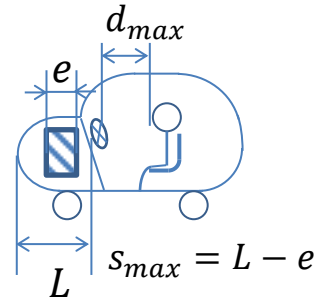
ここで図(欄外)のように、横軸に人の客室内移動量 $d$ 、縦軸に車の変形量 $s$ を取り、初期値 $(d, s)$ をグラフにプロットします。

$$(d, s) = \left( \frac{\frac{1}{2}mv^2}{f} - s, \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{F - f} \right) \quad (4.5)$$

車の変形量 $s$ の上限 $s_{max}$ は図(欄外)のように、客室から車の先端までの距離 $L$ からエンジンなどの硬いユニットの距離 $e$ を取り除いた $s_{max} = L - e$ になります。また、人の客室内移動量 $d$ の上限 $d_{max}$ は、人からステアリングまでの距離です。

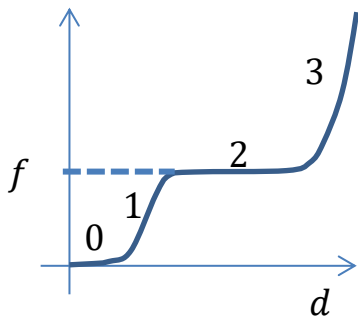
ここで上式を使って、スモールカーの衝突性能について考えてみます。車の変形荷重 $F$ が一定の場合、車の質量 $M$ が軽い車は運動エネルギーが小さいため、車の変形量 $s$ が小さくなります。しかし、人の運動エネルギーは一定であるため、相対的に人の客室内移動量 $d$ は増加し、プロット点は図(欄外)の①のように右下に移ります。このとき、人の客室内移動量 $d$ が、 $d_{max}$ を超えて人がステアリングにぶつかる恐れがある場合は、②のように車の変形荷重 $F$ を小さくし、車の変形量 $s$ を大きくするか、③のようにエアバッグなどを追加し拘束装置の荷重 $f$ を大きくして人を止める必要があります。

また、客室から車の先端までの距離が小さい車では、人の生存空間を確保する上で変形可能な上限 $s_{max}$ が小さくなるため、④のように車の変形荷重 $F$ を大きくする必要があります。このとき、プロット点が $d_{max}$ を超える場合には、⑤のように拘束装置の荷重 $f$ を大きくする必要があります。



## 4.2. 拘束装置を活かす車の変形荷重

シートベルトの荷重たわみ線図

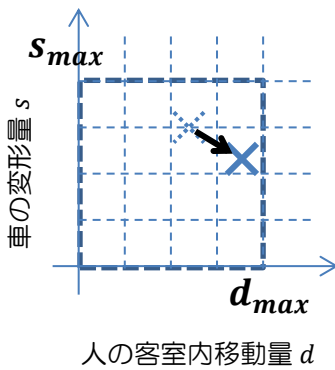


シートベルトの荷重 $f$ を少し現実に近づけて考えます。横軸を人の客室内移動量 $d$ 、縦軸をシートベルトの荷重とし、図(欄外)のような特性を考えます。0~3は、ベルトのたるみがなくなる区間0、ベルトが伸びて荷重が大きくなる区間1、フォースリミッターが働く荷重一定の区間2、最後に底づいて荷重が増大する区間3を表しています。

前節では、衝突中のシートベルトの荷重 $f$ は一定であるとし、車の変形量 $s$ と人の客室内移動量 $d$ を

$$s = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{F - f} \quad (4.6)$$

$$d = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{f} - s$$



と表しました。しかし、実際のシートベルトでは、区間0、1の影響により、シートベルトの荷重が $f$ よりも小さい時間帯があります。従って、車の変形量 $s$ は上式の結果よりも小さく、人の客室内移動量 $d$ は大きくなり、プロット点は図(欄外)のようにグラフの右下にスライドします。

このシートベルトが仕事をしない区間0を減らすために考えられたのが、衝突前にシートベルトのたるみを巻き取るプリテンショナーや、エアバッグの早期展開といった拘束装置の高性能化です。

一方で、拘束装置の性能アップに頼らない方法も考えられます。上式より「シートベルトの荷重が $f$ よりも小さい時間帯を少なく」することがポイントと考えられるため、衝突した瞬間に素早く区間0、1を通り過ぎる、ということができないでしょうか？ 例えば、衝突初期の変形荷重を $F$ より高くし人を優先的に動かし、シートベルトの荷重が $f$ になったら、車の変形荷重を $F$ に下げる。このプロセスを瞬時に行えば、後は式(4.6)に従うはずです。

このように、衝突初期に人の客室内移動量 $d$ を増やすことで、最終的に人の客室内移動量 $d$ を小さくすることができないでしょうか？ この節では、このアイデアを簡単な計算で確認してみます。

### 4.2.1.2 質点ばねマスの数値計算

シートベルトの荷重特性を、「人の客室内移動量 $d$ に対しておおよそ比例する」と考え、図(欄外)の破線から実線のような傾きに簡略化すれば、シートベルトの発生荷重はばね定数 $k$ の反力に置き換えることができます。

ここで図(欄外)のように車の質量を $m_1$ 、人の質量を $m_2$ 、シートベルトのばね定数を $k$ とした2質点モデルで表せば、運動方程式は

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

と表されます。上式の特徴は、右辺の外力が時間の関数ではないことです。車の変形荷重 $F$ は車の部位によって異なるため、変位の関数として $F(x_1)$ と表します。

上式を数値計算で簡易的に解くために、ここでは陽解法を使います。上式を変形し加速度は

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} F(x_1) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \right\}$$

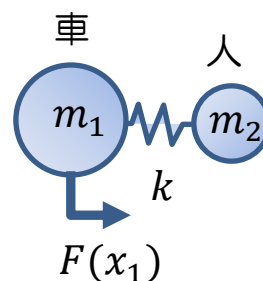
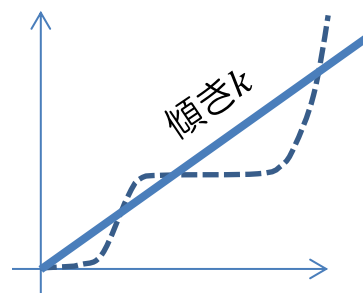
と計算されます。また、次の時間ステップ $t + \Delta t$ での速度および変位は、上式の加速度を用いて

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t + \Delta t) &= \dot{x}_1(t) + \Delta t \cdot \ddot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t + \Delta t) &= \dot{x}_2(t) + \Delta t \cdot \ddot{x}_2(t) \\ x_1(t + \Delta t) &= x_1(t) + \Delta t \cdot \dot{x}_1(t) \\ x_2(t + \Delta t) &= x_2(t) + \Delta t \cdot \dot{x}_2(t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

と計算できます。

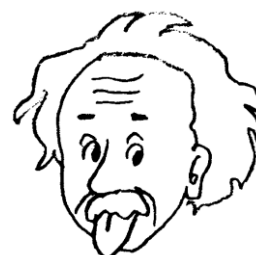
次項では、車の変形荷重 $F(x_1)$ を具体的に与えたときの、式(4.8)、(4.9)の計算結果から、人の客室内移動量が小さくなる車の変形荷重 $F(x_1)$ を考察します。

シートベルトの荷重たわみ線図をばね定数に置き換え



アルベルト・アインシュタイン

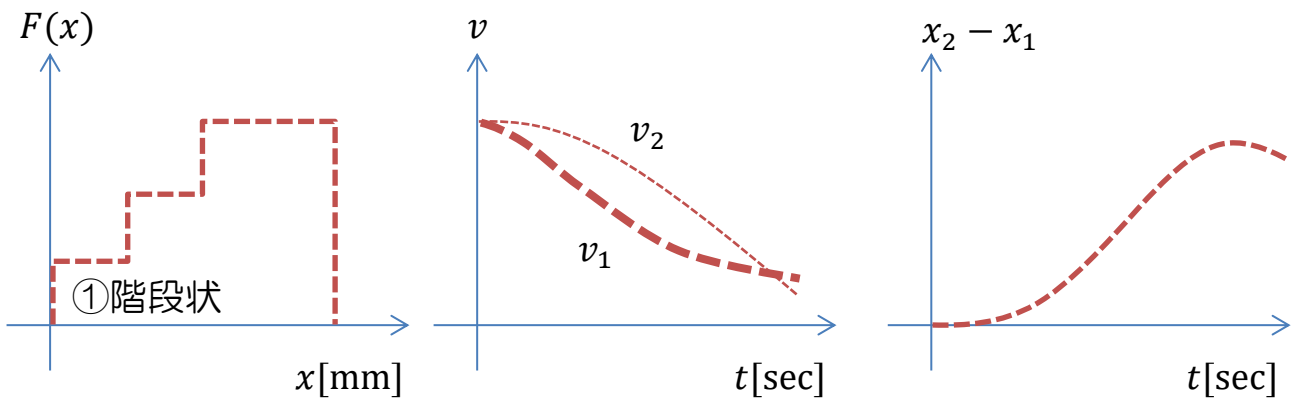
常識とは、18歳までに身につけた偏見のコレクションのことをいう。



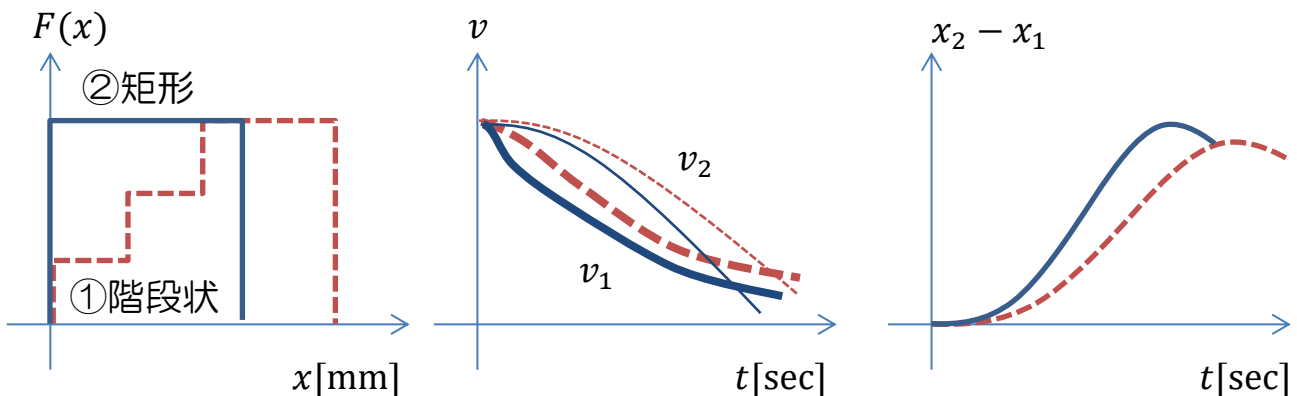
#### 4.2.2.2 質点ばねマスの数値計算結果

車の質量 $m_1 = 1000\text{kg}$ 、人の質量 $m_2 = 100\text{kg}$ 、拘束装置のばね定数 $k = 100\text{N/mm}$ とし、車の変形荷重 $F(x)$ を与えた時の人の客室内移動量 $x_2 - x_1$ を計算で確認します。

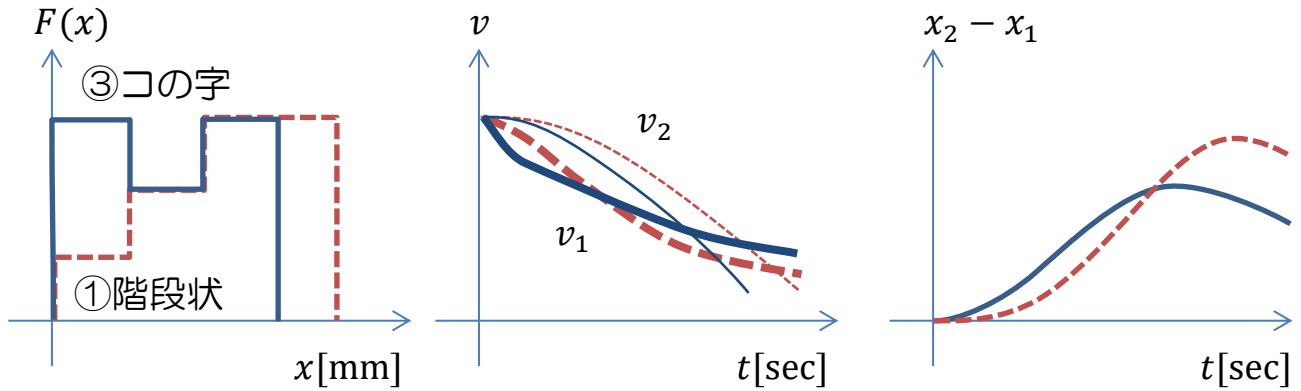
始めに基準の変形荷重 $F(x)$ として、車の構造の弱い部分から壊れる場合を想定した、右肩上がりの階段状の①の特性での計算結果を示します。下図の $v_1$ 、 $v_2$ はそれぞれ車と人の速度を表します。 $v_1$ と $v_2$ の曲線で囲まれる面積が客室内移動量 $x_2 - x_1$ の最大値となるため、基本的な考え方として、人をただちに減速させることと、車をゆっくり減速させることが重要になります。



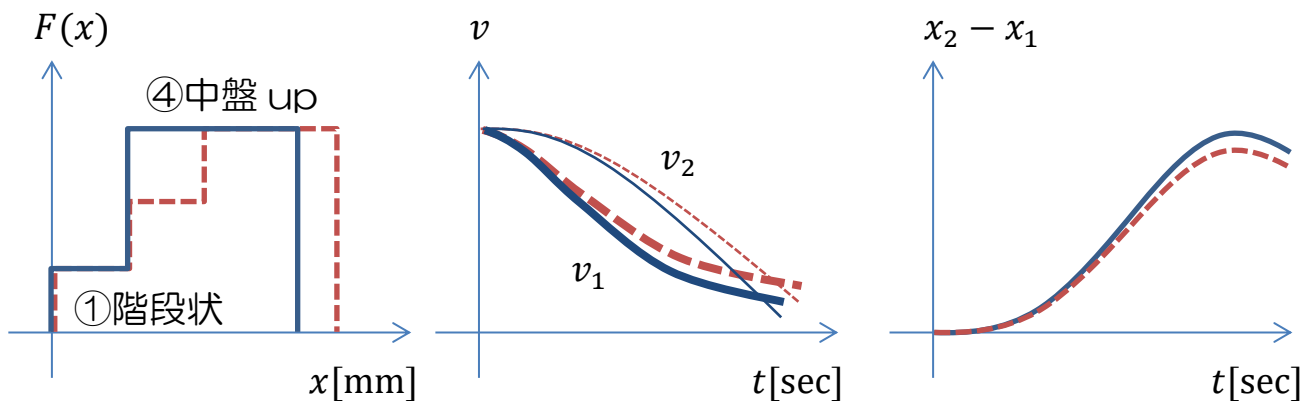
次に①の階段状の特性に対して、構造の弱い部分を補強し均一な強度とした、下図の②の矩形の特性の計算結果を重ねて示します。①の階段状の特性（図の破線）に比べて、車が急に止まろうとするため、初期の車と人の相対速度 $v_2 - v_1$ が大きくなり、人の客室内移動量 $x_2 - x_1$ が大きくなります。



一方、最近の車では、中盤の荷重が低い③のコの字特性を狙った車もあります。①の階段状の特性に比べて、初期の車と人の相対速度 $v_2 - v_1$ が大きくなることは②の矩形の特性と同様です。しかし、中盤の荷重が下がることで、中盤の車と人の相対速度 $v_2 - v_1$ が小さくなり、結果的に人の客室内移動量 $x_2 - x_1$ が小さくなります。



参考に、中盤の荷重だけを上げた④の特性を示します。



以上、簡単な計算で、③のコの字の車の変形荷重 $F(x)$ が人の客室内移動量 $x_2 - x_1$ を減らすための有利な特性であることを確認しました。

ただし、有利な変形荷重 $F(x)$ はシートベルトの荷重特性次第であり、たとえシートベルトを有効に活用できたとしても、ようやく式(4.6)の車の変形量 $s$ と人の客室内移動量 $d$ のトレードオフの関係となることに注意が必要です。従って、衝突性能の素性を向上させるためには

- 車の先端から人までの距離が長いこと
- エンジンなどの硬いユニットが小さいこと
- 拘束装置が高性能なこと
- 車の変形荷重が拘束装置にとって有利なこと

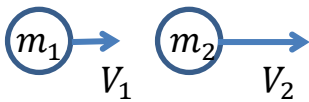
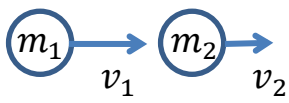
が基本的な考え方になります。

### 4.3. 車の慣性力

前節までは、主に運動エネルギーと仕事の関係から衝突現象を考えてきました。この節では、一度0に立ち戻り、高校物理を出発点として、衝突時の車の慣性力を取り扱う方法を考えたいと思います。

#### 4.3.1. 反発係数

衝突による速度変化



衝突現象として最初に思い起こすのは、高校物理で習った2つのボールがぶつかる問題です。車の衝突ではこれに「ボールが潰れる」という要素を加えると、話が繋がってきます。まずは復習をかねて反発係数を振り返ってみます。2つの質点 $m_1$ 、 $m_2$ が衝突前後で $v_1 \rightarrow V_1$ 、 $v_2 \rightarrow V_2$ に変化したとします。一般に運動量保存則から

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad (4.10)$$

の関係があります。上式を変形し

$$m_2(v_2 - V_2) = -m_1(v_1 - V_1) \quad (4.11)$$

また、衝突前後のエネルギー変化 $\Delta E$ は

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \left( \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - V_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - V_2^2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{2} \{ m_1 (v_1 + V_1)(v_1 - V_1) + m_2 (v_2 + V_2)(v_2 - V_2) \}$$

です。ここで、上式に式(4.11)を代入すれば

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} \{ m_1 (v_1 + V_1)(v_1 - V_1) - m_1 (v_2 + V_2)(v_1 - V_1) \} \\ &= \frac{1}{2} m_1 (v_1 - V_1) \{ v_1 + V_1 - v_2 - V_2 \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

となります。ここで、エネルギー変化 $\Delta E = 0$ となる条件を考えます。上式より2つの条件

$$v_1 - V_1 = 0 \quad (4.14)$$

$$v_1 + V_1 - v_2 - V_2 = 0 \quad (4.15)$$

があります。式(4.14)は衝突せずにすれ違った場合なので、興味があるのは式(4.15)です。式(4.15)を変形し

$$v_1 - v_2 = -(V_1 - V_2) \quad (4.16)$$

$$\frac{v_1 - v_2}{V_1 - V_2} = -1$$

となります。ここで、上式の意味を考えます。衝突前後で相対速度の比が $-1$ ということは、速度が同じで向きが逆、ということです。例えば、剛壁にボールを投げて同じ速度で跳ね返ってきた場合です。高校物理ではこの状況を、反発係数 $e$ の式を

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{V_1 - V_2} \quad (4.17)$$

と定義し、「 $e = 1$ でエネルギー損失が $0$ 」と習いました。一方、 $e = 0$ の場合はどうでしょうか？ 相対速度が $0$ になるということは、衝突後にくっつくことを意味しています。このときのエネルギー変化を考えてみます。衝突後の速度を $V$ とすれば、運動量保存則より

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V \quad (4.18)$$

の関係があります。上式を変形し、衝突後の速度 $V$ は

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (4.19)$$

と求まり、衝突後のエネルギー $E_1$ は

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

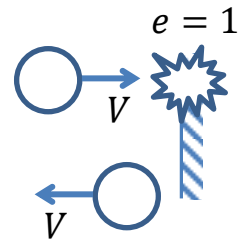
となります。一方、衝突前のエネルギー $E_0$ は

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

であるため、衝突前後のエネルギー変化 $\Delta E$ は

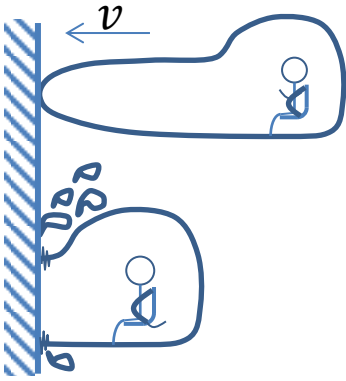
$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_0 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

となります。ここで、上式は常に負です。さて、このエネルギー $\Delta E$ はどこに消えたのでしょうか？



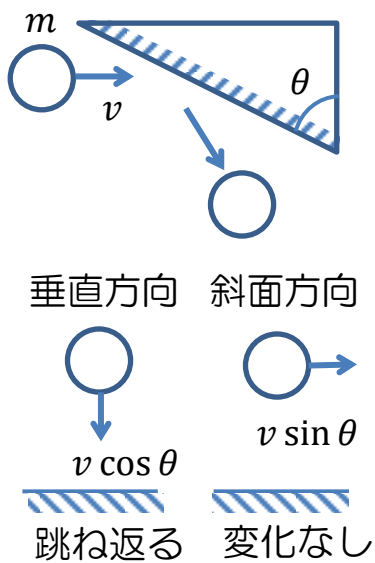


## 安全に「衝撃」-吸収



そうです。ボールが塑性変形することに費やされたのです。そう考えると、ボールを車に見立てた場合、跳ね返った方が安全？ と思いませんか？ しかし、ちょっと待ってください。車が変形せずに同じ速度で跳ね返るということは、人は車の中にいながら車に轢かれる、ということになります。これは、とても安全とは言えません。塑性変形した方がよさそうです。

## 4.3.2. 斜めの斜面 速度の考え方

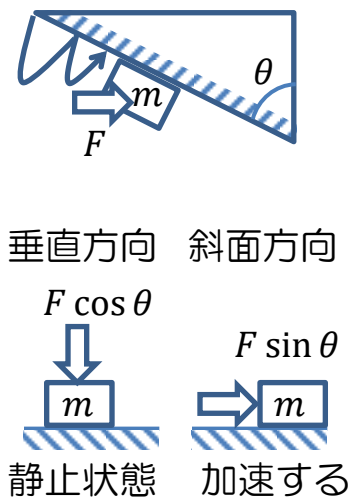


図のように質量 $m$ の物体が速度 $v$ で斜面にぶつかり、跳ね返る場合を考えます。速度 $v$ を斜面の方向とその垂直方向に分けて考えると、話がわかりやすくなります。

ここで、斜面の摩擦係数を0とし、斜面に平行な速度 $v \sin \theta$ は衝突前後で変化しないとします。一方、斜面に垂直な方向の速度 $v_2$ は、反発係数 $e$ に応じて変化します。 $e = 1$ ならば、互いに変形なく速度は反転します。 $e = 0$ ならば壁に張り付き、壁に沿って $v \sin \theta$ で進むことになります。

実際に考えると、斜面に何度かぶつかりながら、斜面の摩擦力で徐々に止まるはずですが、飛行機が不時着するような感じでしょうか。

## 4.3.3. 斜めの斜面 慣性力の考え方



図のように質量 $m$ の物体が斜面にぶつかり、何度か跳ねたり、あるいは潰れたりした後、最終的に力 $F$ で押されながら斜面を滑る場合を考えます。いわゆる高校物理の重力で斜面をすべる問題と同じです。ここでは、一歩進んで物体の内部に働く力(内力)を考えたいと思います。

物体は斜面の垂直方向に動くことはできないため、斜面に垂直な力 $F \cos \theta$ は斜面の反力 $R = F \cos \theta$ とつり合います。物体は両側から $F \cos \theta$ で押されて静止した状態にあることから、これは静力学の問題です。このとき、 $F \cos \theta$ の力は物体全体に及んでいるため、構造の弱い部分が壊れることになります。

一方、斜面方向の力のつり合いはどうでしょうか？  
 斜面の摩擦力を0とすると、つり合う力が何もないため、  
 ニュートンの運動の第2法則に従って加速し続けること  
 になります。

$$F \sin \theta = ma \quad (4.23)$$

ここで、加速度 $a$ で加速している物体の内部に働く力を、  
 物体を図(欄外)のように4等分して考えます。4つに分け  
 てもそれぞれの質量は加速度 $a$ で動こうとしているため、  
 小さな質量は隣り合う質量から力を受けています。例え  
 ば、4番目の質量は $F \sin \theta / 4$ の力を3番目の質量から受  
 ける必要があるため、ニュートンの運動の第2法則より

$$\frac{F \sin \theta}{4} = m_4 a \quad (4.24)$$

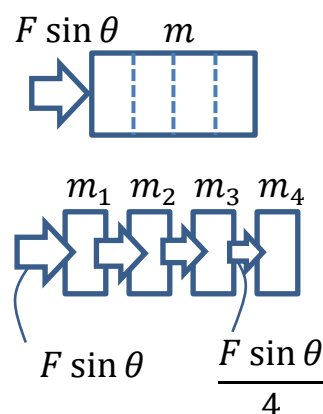
の関係があります。同様に、1～3番目の質量に働く左  
 側からの力を左辺、右側からの力を右辺とし、ニュート  
 ンの運動の第2法則で表すと

$$\begin{aligned} F \sin \theta &= m_1 a + \frac{3F \sin \theta}{4} \\ \frac{3F \sin \theta}{4} &= m_2 a + \frac{2F \sin \theta}{4} \\ \frac{2F \sin \theta}{4} &= m_3 a + \frac{F \sin \theta}{4} \end{aligned} \quad (4.25)$$

となります。上式から、入力点から離れるほど左側の質  
 量から受ける力が徐々に減っていくことがわかります。  
 これは衝突現象を考える上で、大変重要な特徴です。す  
 なわち、加速度を伴いながら伝わる力は、慣性力 $m_n a$ の  
 影響で徐々に減りながら後方に伝わるため、先の静力学  
 の問題と異なり、必ずしも構造の弱い部分が壊れないこ  
 とを示しています。

このように、加速、または減速している物体の内部に  
 働く力は、物体の加速度 $a$ と慣性力を考えることで、静力  
 学の問題と同じように解くことができます。

物体全体が  
 加速度 $a$ で加速



#### 4.3.4. $F = ma$ で考える車の衝突現象

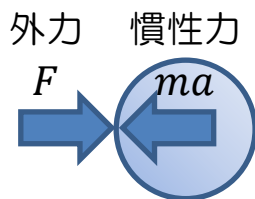
さて、ここで再びニュートンの運動の第2法則

$$F = ma \quad (4.26)$$

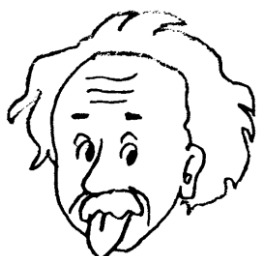
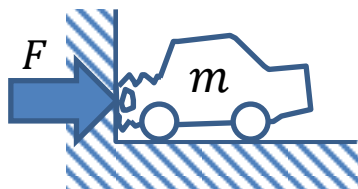
で、これまでの内容を振り返ってみたいと思います。前項では上式を使って、加速している物体の内部に働く力を考えました。車が剛壁に衝突する場合も、壁から力 $F$ をもらって加速度 $a$ で減速しているため、同様に考えることができます。

車の変形荷重 $F$ が大きすぎると、車の加速度 $a$ が大きくなり、車は急に止まろうとします。一方で、人は急に止まれないため、人がステアリングや操作パネルにぶつかる危険が高まります。そこで、拘束装置の性能を上げたり、衝突の初期だけ車の変形荷重 $F$ を上げることで拘束装置の性能を使い切ることを考えました。

前項で考えたように、車の衝突では慣性力の影響により車の前側ほど大きな力が働きます。この慣性力の影響を考慮して、各部の構造、板厚、材料を決定することが、車の構造検討の考え方のひとつになります。車の構造と変形荷重 $F$ の関係については、別の機会に整理したいと思います。



$$\text{加速度 } a = \frac{F}{m}$$



アルベルト・アインシュタイン

理詰めで物事を考えることによって、新しい発見をしたことは、私には一度もない。

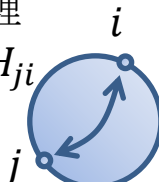
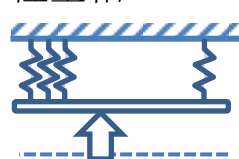
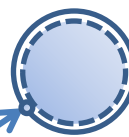
## 参考図書

### 水野幸治 「自動車の衝突安全」

国内の書籍としては、車の衝突全般の基礎知識が得られる初めての教科書と思います。特に、4章の「部材のエネルギー吸収」と5章の「正面衝突」では、車両構造の基礎を学ぶことができます。



## 5. 剛性の式

相反定理 $H_{ij} = H_{ji}$ 	弾性主軸 	カステリャーノの 第2定理 $x_m = \frac{dU}{dF_m}$ 
相対変位の 簡易的な 確認方法	剛性	弾性主軸の 簡易的な 確認方法

剛性そのものを商品価値として実感することはあまりないかもしれませんが、構造物の剛性はいろいろな場面で必要になります。

例えば、エンジン、モーターなど、力を発生するユニットが、狙い通りの機能を発揮するには、土台がしっかりしている必要があります。土台がしっかりしていないと暖簾に腕押しということになります。同様に、路面から力を受けるサスペンションは、車体にしっかりと固定されていなければ、地面に対して踏ん張ることができず、狙いの運動性能を発揮することができません。また、これらのユニットの支持部材は、耐久性や振動騒音の観点から共振周波数を上げるために剛性を高める必要があったり、車両組み付け時にボルトを締める場合、剛性が低いと部品がねじれて組み付いてしまったり、組み付いてもねじの緩みの原因になったりします。

この章では、構造物の剛性を検討するための代表的な3つの考え方

1. 大局的な変形を抑える
2. 変形のバランスをとる
3. 局所変形を抑える

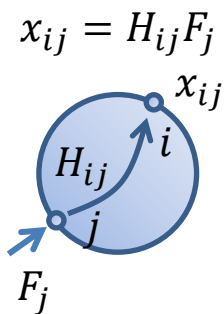
の物理的な確からしさを式で確認したいと思います。

## 5.1. 相反定理（大局的な変形を抑える）

少し経験を積めば、剛性を上げるにはひずみエネルギーの大きい所を補強すればよい、ということを知ります。しかし、ひずみエネルギーは「存在している部材」のどこを硬くすればよいかは教えてくれますが、剛性を上げるための「新たな部材」は教えてくれません。

従って、既にある構造を変えられない場合はひずみエネルギーの見方は威力を発揮しますが、ゼロから構造を考える場合はひずみエネルギー以外の見方が必要になります。ひずみエネルギーのような局所的な変形を見る前に、構造全体の大局的な変形を見て「変形の大きい所を止める」構造を考えることで、効率よく剛性を上げることができます。

この節では、変形の大きい所を止めて剛性がアップする物理的な理由を、ベティの相反定理とマクスウェルの相反定理を使って確認します。



### 5.1.1. ベティの相反定理 仕事の相反定理

物体の変形が微小で幾何学的な非線形を無視できると仮定すれば、物体の点 $j$ に力 $F_j$ を加えた時の点 $i$ の変位は、係数 $H_{ij}$ を用いて次式のように表すことができます。

$$x_{ij} = H_{ij}F_j \quad (5.1)$$

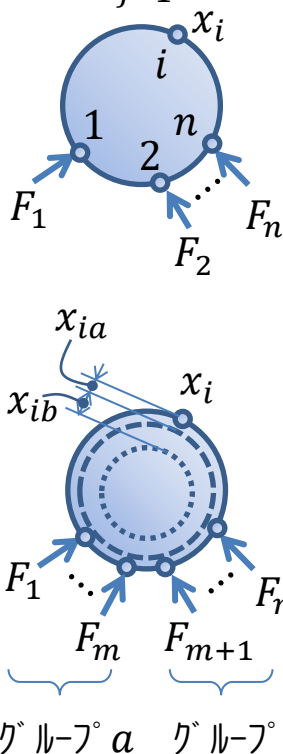
ここで、図（欄外）のように、物体の点 $1, 2, \dots, n$ に外力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ が加わってつり合っている状態を考えます。点 $i$ の変位 $x_i$ は、各々の力によって生じた変位の重ね合わせを考えればよい

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n H_{ij}F_j \quad (5.2)$$

です。ここで、上式の変位 $x_i$ を $F_1, F_2, \dots, F_m$ による変位 $x_{ia}$ （左図の破線）、外力 $F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_n$ による変位 $x_{ib}$ （左図の点線）に分けて表します。

$$x_i = x_{ia} + x_{ib} \quad (5.3)$$

ここで上式の $x_{ia}$ 、 $x_{ib}$ は、式(5.1)より



$$x_{ia} = H_{i1}F_1 + \cdots + H_{im}F_m \quad (5.4)$$

$$x_{ib} = H_{i(m+1)}F_{m+1} + \cdots + H_{in}F_n$$

です。相反定理を導くための準備が整いました。相反定理は外力 $F_1, F_2 \cdots F_n$ を、2つのグループ $a, b$ に分け、 $a \rightarrow b$ 、 $b \rightarrow a$ の順に加えたときの物体に貯えられるひずみエネルギー $U_{ab}$ と $U_{ba}$ が $a \rightarrow b$ 、 $b \rightarrow a$ の順によらず等しいことから導かれます。

始めに $a \rightarrow b$ の順に外力を加えたときの物体に貯えられるひずみエネルギー $U_{ab}$ を考えます。まず、グループ $a$ の外力 $F_1, F_2 \cdots F_m$ を加えたときの任意の点 $i$ の変位は式(5.3)で定義したように $x_{ia}$ です。このとき、物体を押す反力(外力)は図(欄外上)のように変位に比例するため、グループ $a$ の外力による仕事 $W_a$ は三角形の面積

$$W_a = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} F_i x_{ia} \quad (5.5)$$

となります。ここでひとまず、物体は、グループ $a$ の外力が加わった状態で、つり合いの状態にあると考えます。

次にグループ $b$ の外力 $F_{m+1}, F_{m+2} \cdots F_n$ を加えたときの仕事 $W_b$ を考えます。グループ $b$ の外力を加えたときの任意の点 $i$ の変位は式(5.3)で定義したように $x_{ib}$ であるため、グループ $b$ の外力による仕事 $W_b$ は

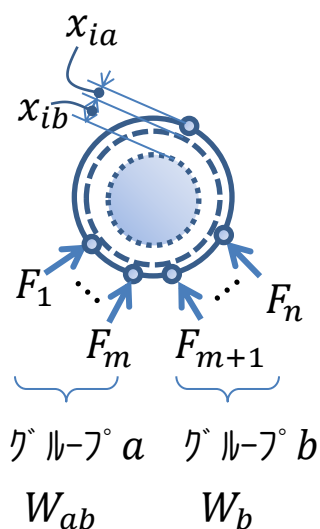
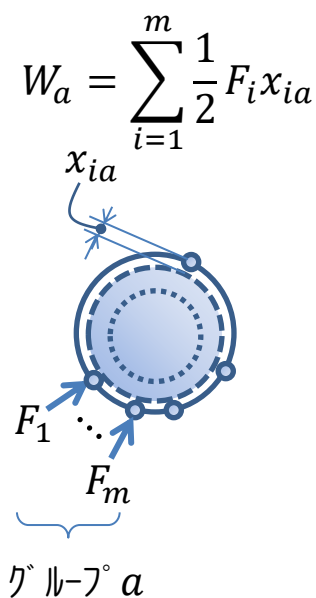
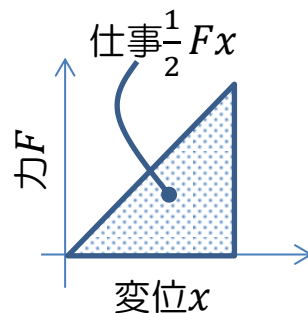
$$W_b = \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{2} F_i x_{ib} \quad (5.6)$$

となります。またこのとき、グループ $b$ の外力によって、グループ $a$ の点にも新たに変位(図の破線から点線)が発生するため、グループ $a$ の外力は追加の仕事を行います。

$$W_{ab} = \sum_{i=1}^m F_i x_{ib} \quad (5.7)$$

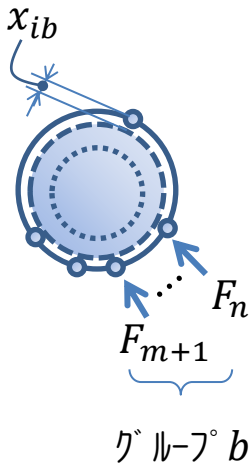
奇妙に感じるかもしれませんが、押している方向の変位が勝手に増えても仕事をしたこととなります。以上より、物体に貯えられるひずみエネルギー $U_{ab}$ はすべての仕事の合計として次のように表されます。

$$U_{ab} = W_a + W_b + W_{ab} \quad (5.8)$$





$$W_b = \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{2} F_i x_{ib}$$



次に、 $b \rightarrow a$ の順に外力を加えたときの物体に貯えられるひずみエネルギー $U_{ba}$ を考えます。グループ**b**の外力 $F_{m+1}, F_{m+2} \dots F_n$ を加えたときのグループ**b**の外力による仕事 $W_b$ は

$$W_b = \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{2} F_i x_{ib} \tag{5.9}$$

です。次にグループ**a**の外力 $F_1, F_2 \dots F_m$ を加えた時のグループ**a**の外力による仕事 $W_a$ は

$$W_a = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} F_i x_{ia} \tag{5.10}$$

です。また、グループ**a**の外力によってグループ**b**の点に生じる変位による追加の仕事 $W_{ba}$ は

$$W_{ba} = \sum_{i=m+1}^n F_i x_{ia} \tag{5.11}$$

となるため、物体に貯えられるひずみエネルギー $U_{ba}$ は

$$U_{ba} = W_b + W_a + W_{ba} \tag{5.12}$$

となります。さて、ここで物体に貯えられるひずみエネルギーは $a \rightarrow b$ 、 $b \rightarrow a$ の順によらず無関係であるため

$$U_{ab} = U_{ba} \tag{5.13}$$

の関係があります。上式に式(5.8)、(5.12)を代入して整理すれば

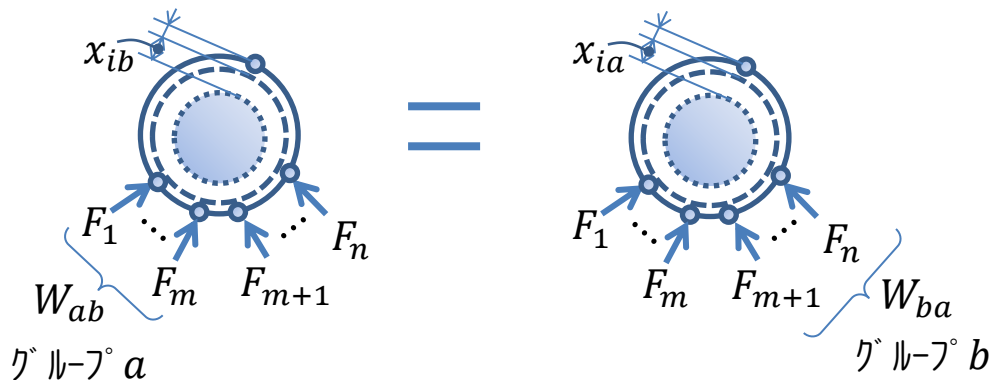
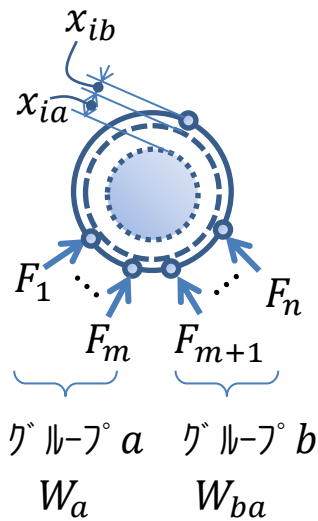
$$W_a + W_b + W_{ab} = W_b + W_a + W_{ba} \tag{5.14}$$

$$W_{ab} = W_{ba}$$

となります。ここで上式に式(5.7)、(5.11)を代入すれば

$$\sum_{i=1}^m F_i x_{ib} = \sum_{i=m+1}^n F_i x_{ia} \tag{5.15}$$

となります。



上式はグループ $a$ の外力とグループ $b$ の外力による変位のなす仕事、グループ $b$ の外力とグループ $a$ の外力による変位のなす仕事に等しいことを表しています。これをベティの相反定理と呼びます。この定理だけでは、何の役に立つのか判然としませんが、次項では有用なマクスウェルの相反定理を上式から導きます。

物理ノートでは、マクスウェルの相反定理と区別するために、ベティの相反定理を「仕事の相反定理」と呼びます。

### 5.1.2. マクスウェルの相反定理 変位の相反定理

物体に働く全ての外力が点 $i$ 、 $j$ に働く2つの外力 $F_i$ 、 $F_j$ のみであるとすれば、ベティの相反定理の式(5.15)は

$$F_i x_{ij} = F_j x_{ji} \quad (5.16)$$

と表されます。ここで、 $x_{ij}$ 、 $x_{ji}$ は式(5.1)より

$$\begin{aligned} x_{ij} &= H_{ij} F_j \\ x_{ji} &= H_{ji} F_i \end{aligned} \quad (5.17)$$

であるため、上式を式(5.16)に代入すると

$$F_i H_{ij} F_j = F_j H_{ji} F_i \quad (5.18)$$

となります。上式の両辺から $F_i F_j$ を消去すれば

$$H_{ij} = H_{ji} \quad (5.19)$$

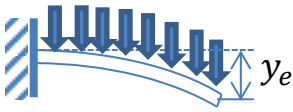
となります。



ここで、 $H_{ij}$ は点 $i$ を外力1で押したときの点 $j$ の変位を表すため、上式は1の力で点 $i$ を押したときの点 $j$ の変位は、1の力で点 $j$ を押したときの点 $i$ の変位に等しいことを表しています。これをマクスウェルの相反定理と呼びます。以下、物理ノートでは、ベティの相反定理と区別するために、マクスウェルの相反定理を「変位の相反定理」と呼びます。

### 5.1.3.変位の相反定理の活用 分布荷重

分布荷重  
 $w$ [N/m]



分布荷重を受ける単純支持梁の先端の変位 $y_e$ をマクスウェルの相反定理を使って計算します。先端に単位荷重を加えた時の梁の変位は、強度の式 3.3.5 項より

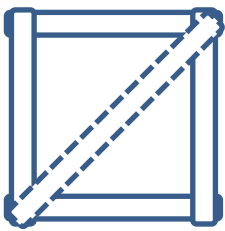
$$y(x) = \frac{1}{6EI} (3Lx^2 - x^3) \quad (5.20)$$

です。マクスウェルの相反定理から、上式は位置 $x$ に単位荷重を加えたときの先端変位を表します。従って、図(欄外)のような分布荷重 $w$ が加わる場合の先端の変位 $y_e$ は

$$\begin{aligned} y_e &= \int_0^L y(x)w dx \\ &= \int_0^L \frac{w}{6EI} (3Lx^2 - x^3) dx \\ &= \frac{w}{6EI} \left[ Lx^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^L \\ &= \frac{w}{6EI} \left( L^4 - \frac{L^4}{4} \right) \\ &= \frac{wL^4}{8EI} \end{aligned} \quad (5.21)$$

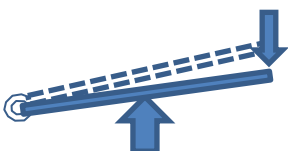
と計算されます。

### 5.1.4.変位の相反定理の活用 変位の大きい所を止める



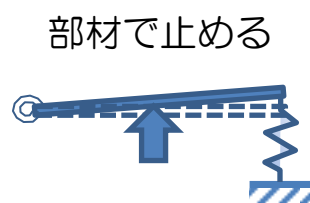
例えば、図(欄外)の実線のような構造に、破線のような斜めの筋違(すじかい)を入れると、剛性が大幅に上がることは、経験的によく知られています。また、回転を許すように固定された梁を押す場合、変位の大きな所を押し返せば、小さな力で入力点の変位を抑えられることは、てこの原理でよく知られています。

変位の大きな所  
を押し返せば  
小さな力で戻せる

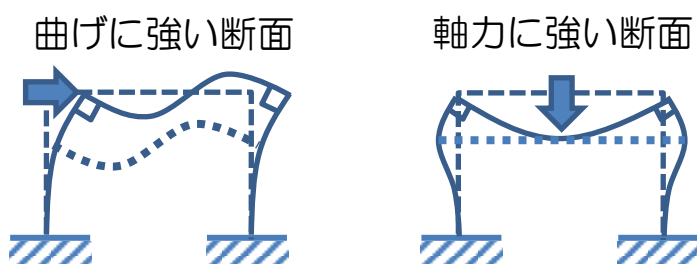


この2つの事柄に共通するのは「変位の大きい方向を止める」、少し限定して言うと「相対変位の大きい方向を止める」ということです。この言葉の確からしさは、マクスウェルの相反定理で物理的に説明することができます。マクスウェルの相反定理によれば、入力点を1の力で押したときに観測される任意の点 $j$ の変位を $x_j$ とする

と、点 $j$ を1の力で押し返せば、入力点は $x_j$ 戻されることを意味しているため、変形が大きい所ほど小さな力で入力点の変位を抑えることができます。従って、図(欄外)のように、相対変位の大きな部分に部材を追加して変形を抑えれば入力点の剛性を高めることができます。この際、長い部材ほど質量が大きくなると考えれば、距離の割に相対変位が大きな部分に部材を追加すれば、効率よく剛性を高めることができます。



次に、下図(欄外)のようなコの字の梁の剛性を効率よく上げるための追加部材の特性を考えます。入力方向が変われば構造全体の変形が変わるため、剛性を上げるために必要な追加部材の特性も異なります。点線は追加部材を示します。



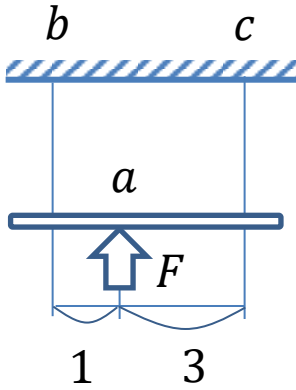
また、支持点の拘束条件によっても、効率よく剛性を上げる追加部材の位置が変化します。支持点が、ピン支持か固定支持かで、梁の変形が異なるため、最適な追加部材の位置が変わります。



ピン支持か固定支持か、これは極端な例で現実じゃない、と思うかもしれませんが。現実には、「必ず」この間になること、拘束条件次第で構造の変形が「変わる」ことを知っていれば、現実に直面したときにすぐ対処法を思いめぐらすことができると思います。

## 5.2. 弾性主軸（変形のバランスをとる）

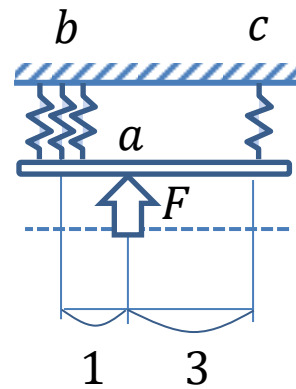
変形のバランスをとることで剛性が上がる理由を、弾性主軸の考え方で、簡単に整理します。



### 5.2.1. 変形のバランスを取る

入力点 $a$ と支持点 $b, c$ を4本のばねと剛棒を介して支える場合、 $a, b, c$ の位置関係から点 $b$ に3本、点 $c$ に1本のばねを繋ぐのがよさそうに思います。点 $b$ と点 $c$ には距離の逆比の力を受け持つため、点 $b, c$ の変位 $x_b, x_c$ は

$$x_b = \frac{3F}{4} = \frac{F}{4k}, \quad x_c = \frac{F}{4} = \frac{F}{4k} \quad (5.22)$$

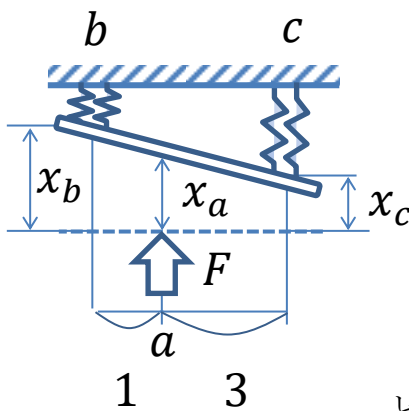


となり、剛棒は回転せず力の方向にのみ変位します。このように、力の方向にのみ変位する位置（軸）を弾性主軸と呼びます。ここで注目したいことは、4本のばねがいずれも等しく $F/4$ の力を受け、 $F/(4k)$ 縮んでいることです。

一方、点 $b, c$ に2本ずつのばねで支えた場合

$$x_b = \frac{3F}{2k} = \frac{3F}{8k}, \quad x_c = \frac{F}{2k} = \frac{F}{8k} \quad (5.23)$$

となり、ばねの変形が偏り、力の方向以外の回転変位が生じます。このとき点 $a$ の変位 $x_a$ は図（欄外）のような位置関係から



$$\begin{aligned} x_a &= x_c + (x_b - x_c) \frac{3}{4} \\ &= \frac{F}{8k} + \left( \frac{3F}{8k} - \frac{F}{8k} \right) \frac{3}{4} \\ &= \frac{F}{8k} + \frac{3F}{16k} \\ &= \frac{F}{4k} + \frac{F}{16k} \end{aligned} \quad (5.24)$$

と計算され、 $F/(4k)$ よりも大きくなります。これは、ばねの配置によって弾性主軸の位置が変わり、入力点が弾性主軸からずれると、回転変位が生じることで入力点の変位が増加すると考えることができます。

### 5.2.2.弾性主軸 簡単な計算例

図(欄外)のような簡単な構造で、入力点の変位 $x_0$ が最小となる条件から、弾性主軸の位置を計算してみます。入力点の位置を $l$ とすると支持点の反力 $R_1$ 、 $R_2$ は

$$R_1 = \frac{L-l}{L}F, \quad R_2 = \frac{l}{L}F \quad (5.25)$$

です。従って、変位 $x_1$ 、 $x_2$ は上式の反力を支持点のばね定数で除して

$$x_1 = \frac{L-l}{L} \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{l}{L} \frac{F}{k_2} \quad (5.26)$$

と求まります。ここで入力点の変位 $x_0$ は、図(欄外)の $x_1$ のような位置関係から

$$x_0 = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{l}{L} \quad (5.27)$$

と表されます。上式に式(5.26)を代入し入力点の変位 $x_0$ は

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{L-l}{L} \frac{F}{k_1} + \left( \frac{l}{L} \frac{F}{k_2} - \frac{L-l}{L} \frac{F}{k_1} \right) \frac{l}{L} \\ &= \frac{L-l}{L} \frac{F}{k_1} \left( 1 - \frac{l}{L} \right) + \left( \frac{l}{L} \right)^2 \frac{F}{k_2} \\ &= \left( \frac{L-l}{L} \right)^2 \frac{F}{k_1} + \left( \frac{l}{L} \right)^2 \frac{F}{k_2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

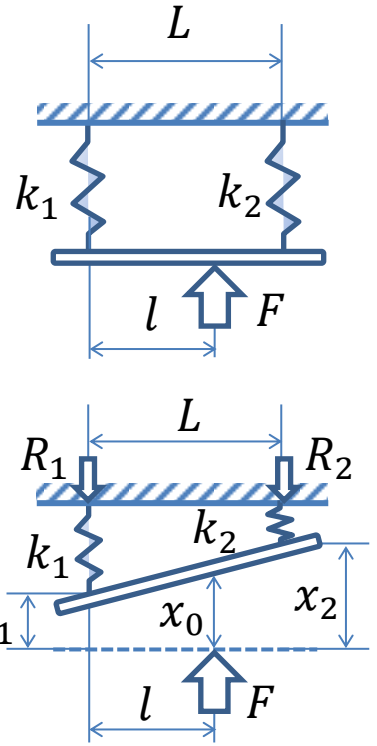
と求まります。次に $x_0$ が最も小さくなる $l$ を計算します。上式の微分が0になる条件を考えればよく

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dl} = 0 &= 2 \left( \frac{L-l}{L} \right) \left( -\frac{1}{L} \right) \frac{F}{k_1} + 2 \left( \frac{l}{L} \right) \left( \frac{1}{L} \right) \frac{F}{k_2} \\ &= -2 \frac{L-l}{L^2} \frac{F}{k_1} + 2 \frac{l}{L^2} \frac{F}{k_2} \\ &= \frac{2F}{L^2} \left( \frac{l-L}{k_1} + \frac{l}{k_2} \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

ここで、上式が0になるためには、大括弧の中が0となればよいため、弾性主軸の位置 $l$ は

$$\begin{aligned} \frac{l-L}{k_1} + \frac{l}{k_2} &= 0 \\ k_2 l - k_2 L + k_1 l &= 0 \\ l &= \frac{k_2}{k_1 + k_2} L \end{aligned} \quad (5.30)$$

と求まります。



### 5.3. カスティリアーノの第2定理（局所変形を抑える）

一般に、構造物のひずみエネルギーを下げて剛性を高める、ということがよく行われます。例えば、ひずみエネルギーが大きい部位の板厚を上げたり、広い平面が面の外側に逃げて仕事をしない部位に角（稜線）を通して、周辺のひずみエネルギーを低下させます。

これらの方策の物理的な根拠は、ひずみエネルギーの合計が入力点の変位そのものであることを示す、カスティリアーノの第2定理で説明されます。この節では、定理の導出とその使い方について簡単に整理します。

#### 5.3.1. カスティリアーノの第2定理

物体の変形が微小で幾何学的な非線形を無視できると仮定すれば、物体の点 $j$ に力 $F_j$ を加えた時の点 $i$ の変位は、係数 $H_{ij}$ を用いて次式のように表すことができます。

$$x_{ij} = H_{ij}F_j \quad (5.31)$$

ここで、図（欄外中）のように、物体の点 $1, 2 \dots n$ に外力 $F_1, F_2 \dots F_n$ が加わってつり合っているときの物体のひずみエネルギーを考えます。点 $i$ の変位 $x_i$ は、各々の力によって生じる変位の重ね合わせを考えればよいため

$$x_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}F_j$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n H_{ij}F_j \quad (5.32)$$

です。このとき、物体内部に貯えられるひずみエネルギー $U$ は外力のなす仕事に等しいため

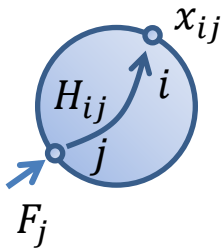
$$U = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} F_j x_j \quad (5.33)$$

です。ここで上式に、積の微分公式を適用し

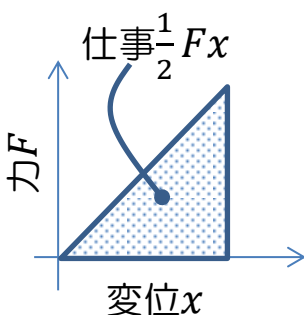
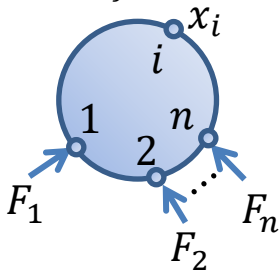
$$\frac{dU}{dF_m} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{dF_j}{dF_m} x_j \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( F_j \frac{dx_j}{dF_m} \right) \quad (5.34)$$

と表します。上式の第1項の微分 $dF_j/dF_m$ は、 $j = m$ のとき1、 $j \neq m$ のとき0であるため

$$x_{ij} = H_{ij}F_j$$



$$x_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}F_j$$



$$\frac{dU}{dF_m} = \frac{1}{2}x_m + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left( F_j \frac{dx_j}{dF_m} \right) \quad (5.35)$$

となります。また、上式の第2項に含まれる $x_j$ は式(5.32)の $i$ を $j$ に置き換えた式であるため

$$x_j = H_{j1}F_1 + \cdots + H_{jm}F_m + \cdots + H_{jn}F_n \quad (5.36)$$

です。また、上式の微分 $dx_j/dF_m$ は

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dF_m} &= 0 + \cdots + H_{jm} \cdot 1 + \cdots + 0 \\ &= H_{jm} \end{aligned} \quad (5.37)$$

となります。従って、上式を式(5.35)に代入すれば

$$\frac{dU}{dF_m} = \frac{1}{2}x_m + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n F_j H_{jm} \quad (5.38)$$

となります。ここで、上式の $H_{jm}$ は変位の相反定理より $H_{jm} = H_{mj}$ に置き換えることができるため

$$\frac{dU}{dF_m} = \frac{1}{2}x_m + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n H_{mj}F_j \quad (5.39)$$

と表せます。上式の第2項は、式(5.32)の $i$ を $m$ に置き換えた式であるため

$$\frac{dU}{dF_m} = \frac{1}{2}x_m + \frac{1}{2}x_m \quad (5.40)$$

となります。以上より、カスティリアーノの第2定理は

$$x_m = \frac{dU}{dF_m} \quad (5.41)$$

と表されます。

上式は入力点の変位を計算する上で非常に便利な物理式です。ただし、これを用いるためには物体のひずみエネルギー $U$ を入力点の外力 $F_m$ の関数で表す必要があります。次項では、外力 $F_m$ によって物体に貯えられるひずみエネルギー $U$ について整理します。

ヘンリー・フォード

「できる」と信じるか

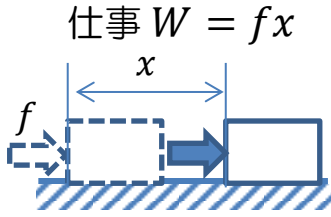
「できない」と信じるか

どちらも結果は完全にその通りになる





## 5.3.2.仕事とひずみエネルギー



図(欄外)のように、力 $f$ で物体を $x$ 動かすとき、「力 $f$ は物体に対して $fx$ の仕事をする」と定義され仕事 $W$ は

$$W = \int_0^x f dx = [fx]_0^x = fx \quad (5.42)$$

と表されます。

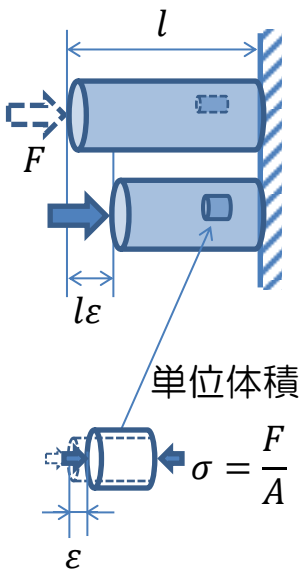
一方、図(欄外)のように、ばねを縮めたときの力 $f(x)$ は変位 $x$ によって異なるため、上式は

$$W = \int_0^x f(x) dx \quad (5.43)$$

と表されます。ここで、上式の $f(x)$ を $f(x) = kx$ と置き換えて計算を行えば

$$W = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x kx dx = k \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} kx^2 = U \quad (5.44)$$

となり、ばねに及ぼした仕事 $W$ がばねのひずみエネルギー $U$ に等しいことがわかります。



同様の考え方で、面積 $A$ 、長さ $l$ の梁に力 $F$ が加わったときの梁のひずみエネルギーを考えます。始めに、図(欄外)の単位体積のひずみエネルギー $u$ を考えます。式(5.44)の $U \rightarrow u$ 、 $f(x) \rightarrow \sigma(\epsilon) = E\epsilon$ と置き換え

$$u = \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\epsilon E\epsilon d\epsilon = \frac{1}{2} E\epsilon^2 \quad (5.45)$$

と表されます。従って、梁全体のひずみエネルギー $U$ は、上式に梁の体積 $Al$ を乗じて

$$U = uAl = \frac{1}{2} E\epsilon^2 Al \quad (5.46)$$

となります。ここで、ひずみ $\epsilon$ は、 $\sigma = E\epsilon$ と $\sigma = F/A$ の関係から

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= \sigma = E\epsilon \\ \epsilon &= \frac{F}{EA} \end{aligned} \quad (5.47)$$

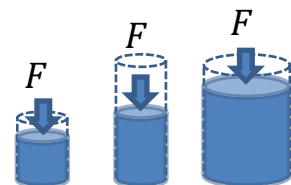
と表されます。従って、上式を式(5.46)に代入すれば、梁のひずみエネルギー $U$ は

$$U = \frac{1}{2} E \left( \frac{F}{EA} \right)^2 Al = \frac{F^2 l}{2EA} \quad (5.48)$$

と表されます。ここで、上式の意味を図（欄外）のような3つのゴムで考えます。同じ $F$ でもゴムが短い方、面積が大きい方が入力点の変位が小さくなり、ひずみエネルギーも小さくなることを示しています。

ひずみエネルギー - 半分

- ・長さ $l$  半分
- ・面積 $A$  2倍



$l$  半分                       $A$  2倍

最後に曲げモーメント $M$ を受ける梁のひずみエネルギーを考えます。断面の中立軸から距離 $z$ の単位体積の応力は、強度の式 3.6.1 項の式(3.6.9)の距離 $e_1$ を $z$ に置き換えて

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (5.49)$$

です。上式に $\sigma = E\varepsilon$ を代入し $\varepsilon$ について整理すると

$$\varepsilon = \frac{M}{EI} z \quad (5.50)$$

となります。従って、梁の単位長さあたりのひずみエネルギー $u_A$ は、上式と式(5.45)から

$$\begin{aligned} u_A &= \int \int \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dy dz \\ &= \int \int \frac{1}{2} E \left( \frac{M}{EI} z \right)^2 dy dz \\ &= \frac{M^2}{2EI^2} \int \int z^2 dy dz \end{aligned} \quad (5.51)$$

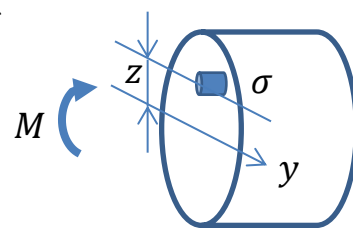
と求まります。ここで、上式の $z^2$ の積分の式は断面2次モーメント $I$ の定義そのものであるため

$$u_A = \frac{M^2}{2EI^2} I = \frac{M^2}{2EI} \quad (5.52)$$

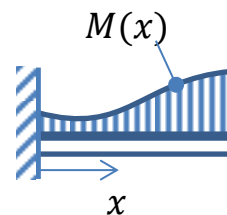
となります。以上より、長さ $l$ の梁全体のひずみエネルギー $U$ は、位置 $x$ でのモーメント $M(x)$ を用いて

$$U = \int_0^l u_A dx = \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx \quad (5.53)$$

と表されます。



断面2次モーメント  $I$

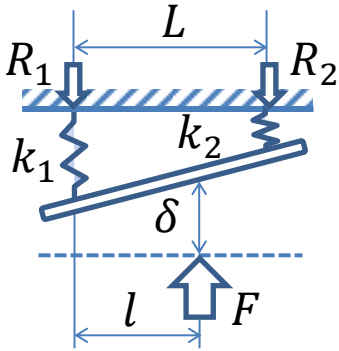


ヘンリー・フォード

自分で薪を割れ、二重に温まる



### 5.3.3.入力点の変位 並列ばねモデル



図（欄外）のような構造の入力点の変位 $\delta$ をカステイリアーノの第2定理を使って計算します。始めに内力 $R$ で縮められたばねのひずみエネルギーを内力 $R$ の関数で表します。

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{R}{k} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{k} \quad (5.54)$$

ここで、図（欄外）の2つのばねに働く力 $R_1$ 、 $R_2$ は

$$R_1 = \frac{L-l}{L} F \quad (5.55)$$

$$R_2 = \frac{l}{L} F$$

です。従って、2つのばねの合計のひずみエネルギー $U$ は上式と式(5.54)を用いて

$$U = \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{k_1} + \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{k_2} \quad (5.56)$$

$$= \frac{1}{2k_1} \left( \frac{L-l}{L} \right)^2 F^2 + \frac{1}{2k_2} \left( \frac{l}{L} \right)^2 F^2$$

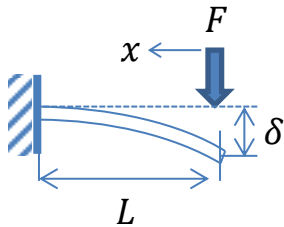
と表されます。上式にカステイリアーノの第2定理を適用すれば、入力点の変位 $\delta$ は

$$\delta = \frac{dU}{dF} = \frac{F}{k_1} \left( \frac{L-l}{L} \right)^2 + \frac{F}{k_2} \left( \frac{l}{L} \right)^2 \quad (5.57)$$

と計算されます。

式(5.28)の計算に比べて、少ない計算量で入力点の変位 $\delta$ を計算することができます。

### 5.3.4.入力点の変位 片持ち梁



片持ち梁の先端の変位 $\delta$ をカステイリアーノの第2定理を使って計算します。曲げモーメント $M(x)$ が付加された梁のひずみエネルギー $U$ は、式(5.53)より

$$U = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx \quad (5.58)$$

と表されます。従って、片持ち梁のひずみエネルギー $U$ は上式に片持ち梁の曲げモーメント $M(x) = Fx$ を代入し

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^L \frac{F^2 x^2}{2EI} dx \\
 &= \frac{F^2}{2EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L \\
 &= \frac{F^2 L^3}{6EI}
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

と表されます。上式にカステリアーノの第2定理を適用すれば、入力点の変位 $\delta$ は

$$\delta = \frac{dU}{dF} = \frac{FL^3}{3EI} \tag{5.60}$$

と計算されます。

### 5.3.5.入力点の変位 単純支持梁

単純支持梁の中央に荷重 $F$ を加えたときの変位 $\delta$ をカステリアーノの第2定理を使って計算します。図(欄外)の単純支持梁の中央から左半分的位置 $x$ の曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{F}{2}x \tag{5.61}$$

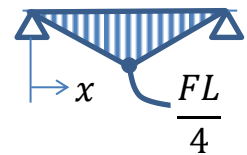
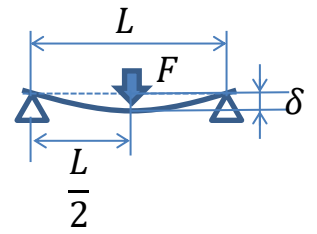
と表されます。上式で表される曲げモーメントを受ける部材が左右に2つあると考えれば、単純支持梁のひずみエネルギー $U$ は

$$\begin{aligned}
 U &= 2 \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M(x)^2}{2EI} dx \\
 &= \frac{F^2}{4EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{L}{2}} \\
 &= \frac{F^2 L^3}{96EI}
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

と表されます。上式にカステリアーノの第2定理を適用すれば、入力点の変位 $\delta$ は

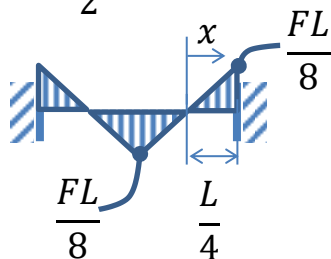
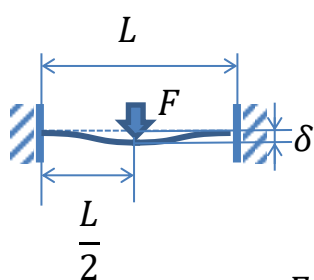
$$\delta = \frac{dU}{dF} = \frac{FL^3}{48EI} \tag{5.63}$$

と計算されます。



$$M(x) = \frac{FL}{4} \frac{x}{\frac{L}{2}} = \frac{F}{2}x$$

## 5.3.6.入力点の変位 固定端梁



$$M(x) = \frac{FL}{8} \frac{x}{L/4} = \frac{F}{2} x$$

固定端梁の中央に荷重 $F$ を加えたときの変位 $\delta$ をカスティリアーノの第2定理を使って計算します。図（欄外）の両端固定端梁の位置 $x$ の曲げモーメント $M(x)$ は

$$M(x) = \frac{F}{2} x \quad (5.64)$$

と表されます。上式で表される曲げモーメントを受ける部材が4つあると考えれば、両端固定梁のひずみエネルギー $U$ は

$$\begin{aligned} U &= 4 \cdot \int_0^{L/4} \frac{M(x)^2}{2EI} dx \\ &= \frac{F^2}{2EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/4} \\ &= \frac{F^2 L^3}{384EI} \end{aligned} \quad (5.65)$$

と表されます。上式にカスティリアーノの第2定理を適用すれば、入力点の変位 $\delta$ は

$$\delta = \frac{dU}{dF} = \frac{FL^3}{192EI} \quad (5.66)$$

と計算されます。



ヘンリー・フォード

成功の秘訣というものがあるとすれば、それは、常に他人の立場を理解し、自分の立場と同時に、他人の立場からものごとを見ることのできる能力である。

### 5.3.7.入力点の変位 門形ラーメン

1本の横部材と2本の縦部材からなる門形ラーメンの中央に荷重 $F$ を加えたときの変位 $\delta$ をカスティリアーノの第2定理を使って計算します。

強度の式で計算したように、門形ラーメンの曲げモーメントは図(欄外)のようになります。ここで、横部材のひずみエネルギーを $U_1$ 、縦部材1本分のひずみエネルギーを $U_2$ とすれば、門形ラーメンのひずみエネルギー $U$ は次式のように表されます。

$$U = U_1 + 2U_2 \quad (5.67)$$

始めに横部材のひずみエネルギー $U_1$ を求めます。図(欄外)のように、左右対称なモーメント分布を4つに分け、各々の区間のひずみエネルギーを $u_1$ と $u_2$ と置けば

$$U_1 = 2(u_1 + u_2) \quad (5.68)$$

と表すことができます。 $u_1$ と $u_2$ を計算するための積分区間 $w_1$ 、 $w_2$ は、図(欄外)の幾何学的な関係から

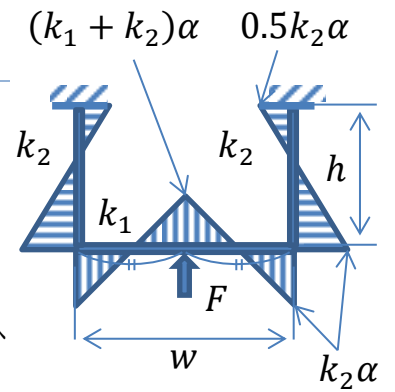
$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{w}{2} \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{w}{2} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 + 2k_2} \\ w_2 &= \frac{w}{2} \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{w}{2} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} \end{aligned} \quad (5.69)$$

と表されます。

また、モーメント分布の傾き $\alpha$ は、入力点の曲げモーメントを $M_1$ (正の値)、接続部の曲げモーメントを $M_2$ (正の値)とすれば

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M_1 + M_2}{w/2} \\ &= \frac{2}{w} \cdot \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2 + k_2}{k_1 + 2k_2} \\ &= \frac{F}{2} \end{aligned} \quad (5.70)$$

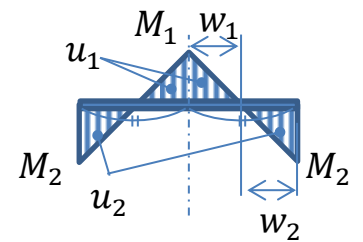
です。



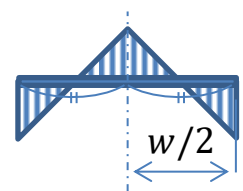
$$k_1 \equiv I_1/w$$

$$k_2 \equiv I_2/h$$

$$\alpha \equiv \frac{Fw}{4} \cdot \frac{1}{k_1 + 2k_2}$$



$$M_1 = (k_1 + k_2)\alpha$$



$$M_2 = k_2\alpha$$

以上より、式(5.68)は

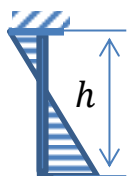
$$\begin{aligned}
 U_1 &= 2(u_1 + u_2) \\
 &= 2 \int_0^{w_1} \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2EI_1} dx + 2 \int_0^{w_2} \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2EI_1} dx \\
 &= \frac{F^2 w_1^3}{12EI_1} + \frac{F^2 w_2^3}{12EI_1} \\
 &= \frac{F^2}{12EI_1} (w_1^3 + w_2^3)
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

となります。ここで、上式の $w_1$ 、 $w_2$ に式(5.69)を代入し、 $k_1 = I_1/w$ と置き換えて整理すると

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{F^2}{12EI_1} \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^3 \cdot \frac{\{(k_1 + k_2)^3 + k_2^3\}}{(k_1 + 2k_2)^3} \\
 &= \frac{F^2 w^2}{96Ek_1} \cdot \frac{k_1^3 + 3k_1 k_2^2 + 3k_1^2 k_2 + 2k_2^3}{(k_1 + 2k_2)^3} \\
 &= \frac{F^2 w^2}{96Ek_1} \cdot \frac{(k_1 + 2k_2)(k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2)}{(k_1 + 2k_2)^3} \\
 &= \frac{F^2 w^2}{96Ek_1} \cdot \frac{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2}{(k_1 + 2k_2)^2}
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

となります。

$$M_3 = 0.5k_2\alpha$$



$$M_2 = k_2\alpha$$

次に縦部材のひずみエネルギー $U_2$ を求めます。モーメント分布の傾き $b$ は、接続部の曲げモーメントを $M_2$ (正の値)、接地部の曲げモーメントを $M_3$ (正の値)を用いて

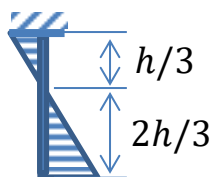
$$\begin{aligned}
 b &= \frac{M_2 + M_3}{h} \\
 &= \frac{1}{h} \left( \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2 + 0.5k_2}{k_1 + 2k_2} \right) \\
 &= \frac{Fw}{8h} \cdot \frac{3k_2}{k_1 + 2k_2}
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

と表されます。また、 $M_2:M_3 = 2:1$ の関係より、縦部材の2:1位置が曲げモーメント0となるため、縦部材2本のひずみエネルギー $2U_2$ は

$$2U_2 = 2 \left\{ \int_0^{\frac{h}{3}} \frac{(bx)^2}{2EI_2} dx + \int_0^{\frac{2h}{3}} \frac{(bx)^2}{2EI_2} dx \right\} \tag{5.74}$$

と表すことができます。上式を計算すれば

$$M_3 = 0.5k_2\alpha$$



$$M_2 = k_2\alpha$$

$$\begin{aligned}
2U_2 &= \frac{b^2}{EI_2} \left\{ \frac{1}{3} \left( \frac{h}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} \left( \frac{2h}{3} \right)^3 \right\} \\
&= \frac{b^2}{81EI_2} (h^3 + 8h^3) \\
&= \frac{b^2 h^3}{9EI_2}
\end{aligned} \tag{5.75}$$

となります。ここで、上式の $b$ に式(5.73)を代入し、 $k_2 = I_2/h$ と置き換えて整理すると

$$\begin{aligned}
2U_2 &= \left( \frac{Fw}{8h} \cdot \frac{3k_2}{k_1 + 2k_2} \right)^2 \cdot \frac{h^2}{9Ek_2} \\
&= \frac{F^2 w^2}{64h^2} \cdot \frac{9k_2^2}{(k_1 + 2k_2)^2} \cdot \frac{h^2}{9Ek_2} \\
&= \frac{F^2 w^2}{64E} \cdot \frac{k_2}{(k_1 + 2k_2)^2}
\end{aligned} \tag{5.76}$$

となります。

以上より、門形ラーメンのひずみエネルギー $U$ は式(5.67)に式(5.72)、(5.76)を代入し

$$U = \frac{F^2 w^2}{96Ek_1} \cdot \frac{k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2}{(k_1 + 2k_2)^2} + \frac{F^2 w^2}{64E} \cdot \frac{k_2}{(k_1 + 2k_2)^2} \tag{5.77}$$

と表されます。上式を整理し

$$\begin{aligned}
U &= \frac{F^2 w^2}{192E} \cdot \frac{2k_1^2 + 2k_1 k_2 + 2k_2^2 + 3k_1 k_2}{k_1(k_1 + 2k_2)^2} \\
&= \frac{F^2 w^2}{192E} \cdot \frac{2k_1^2 + 5k_1 k_2 + 2k_2^2}{k_1(k_1 + 2k_2)^2} \\
&= \frac{F^2 w^2}{192E} \cdot \frac{(2k_1 + k_2)(k_1 + 2k_2)}{k_1(k_1 + 2k_2)^2} \\
&= \frac{F^2 w^2}{192E} \cdot \frac{2k_1 + k_2}{k_1(k_1 + 2k_2)}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

となります。

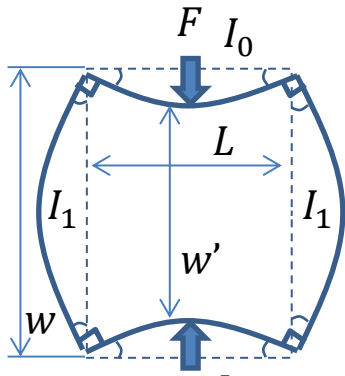
上式にカスティアリアーノの第2定理を適用すれば、入力点の変位 $\delta$ は

$$\delta = \frac{dU}{dF} = \frac{Fw^2}{96E} \cdot \frac{2k_1 + k_2}{k_1(k_1 + 2k_2)} \tag{5.79}$$

と計算されます。



## 5.3.8.入力点の変位 矩形ラーメン



$$\delta = w - w' \quad \begin{cases} M_1 \\ M_2 \end{cases} = \frac{FL}{8\{3k_0^2 + 2k_0(k_1 + k_2) + k_1k_2\}} \begin{cases} k_1(3k_0 + k_2) \\ k_2(3k_0 + k_1) \end{cases} \quad (5.80)$$

$$k_1 = \frac{EI_1}{w}$$

に  $k_2 = k_1$ 、 $M_2 = M_1 = M$  を代入し

$$\begin{aligned} M &= \frac{FLk_1(3k_0 + k_1)}{8\{3k_0^2 + 2k_0(k_1 + k_1) + k_1k_1\}} \\ &= \frac{FLk_1(3k_0 + k_1)}{8\{3k_0^2 + 4k_0k_1 + k_1^2\}} \\ &= \frac{FLk_1(3k_0 + k_1)}{8(3k_0 + k_1)(k_0 + k_1)} \\ &= \frac{FL}{8} \cdot \frac{k_1}{k_0 + k_1} \end{aligned} \quad (5.81)$$

となります。また、入力点の曲げモーメント  $M_0$  は

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{FL}{4} - M \\ &= \frac{FL}{4} - \frac{FL}{8} \cdot \frac{k_1}{k_0 + k_1} \\ &= \frac{FL}{8} \left( 2 - \frac{k_1}{k_0 + k_1} \right) \\ &= \frac{FL}{8} \cdot \frac{2k_0 + k_1}{k_0 + k_1} \end{aligned} \quad (5.82)$$

となります。

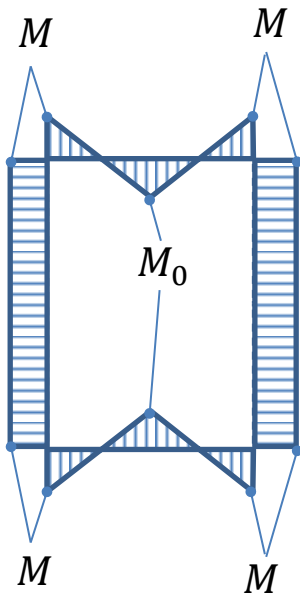
ここで、横部材と縦部材のひずみエネルギーを  $U_0$ 、 $U_1$  と置けば、矩形ラーメンのひずみエネルギー  $U$  は

$$U = 2(U_0 + U_1) \quad (5.83)$$

と表されます。また、上式にカステリアーノの第2定理を適用すれば、入力点の変位  $\delta$  は

$$\delta = \frac{dU}{dF} = 2 \left( \frac{dU_0}{dF} + \frac{dU_1}{dF} \right) \quad (5.84)$$

と計算されます。



始めに縦部材のひずみエネルギー $U_1$ を計算します。  
一定の曲げモーメント $M$ で曲げられた梁のひずみエネルギー $U_1$ は

$$U_1 = \int_0^w \frac{M^2}{2EI_1} dx = \frac{M^2 w}{2EI_1} \quad (5.85)$$

です。上式の曲げモーメント $M$ に式(5.81)を代入し

$$U_1 = \frac{M^2 w}{2EI_1} = \frac{F^2 w}{2EI_1} \left( \frac{L}{8} \cdot \frac{k_1}{k_0 + k_1} \right)^2 \quad (5.86)$$

となります。ここで、上式を荷重 $F$ で微分し、 $EI_1/w = k_1$ と置き換えれば、横部材のひずみエネルギー $U_1$ に起因する入力点の変位は

$$\frac{dU_1}{dF} = \frac{F}{k_1} \left( \frac{L}{8} \cdot \frac{k_1}{k_0 + k_1} \right)^2 \quad (5.87)$$

と表されます。

次に横部材のひずみエネルギー $U_0$ を求めます。図(欄外)のように、左右対称なモーメント分布を4つに分け、各々の区間のひずみエネルギーを $u_1$ と $u_2$ と置けば

$$U_0 = 2(u_1 + u_2) \quad (5.88)$$

と表すことができます。 $u_1$ と $u_2$ を計算するための積分区間 $w_1$ 、 $w_2$ は、図(欄外)の幾何学的な関係から

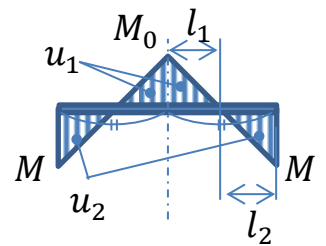
$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{L}{2} \cdot \frac{M_0}{M_0 + M} = \frac{L}{2} \cdot \frac{2k_0 + k_1}{2k_0 + 2k_1} \\ l_2 &= \frac{L}{2} \cdot \frac{M}{M_0 + M} = \frac{L}{2} \cdot \frac{k_1}{2k_0 + 2k_1} \end{aligned} \quad (5.89)$$

と表されます。

また、モーメント分布の傾き $a$ は入力点の曲げモーメントを $M_0$ (正の値)、接続部の曲げモーメントを $M$ (正の値)とすれば

$$\begin{aligned} a &= \frac{M_0 + M}{L/2} \\ &= \frac{2}{L} \cdot \frac{FL}{8} \left( \frac{2k_0 + k_1}{k_0 + k_1} + \frac{k_1}{k_0 + k_1} \right) \\ &= \frac{F}{4} \cdot \frac{2k_0 + 2k_1}{k_0 + k_1} \\ &= \frac{F}{2} \end{aligned} \quad (5.90)$$

となります。



以上より、式(5.88)は

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 2(u_1 + u_2) \\
 &= 2 \int_0^{l_1} \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2EI_1} dx + 2 \int_0^{l_2} \frac{\left(\frac{F}{2}x\right)^2}{2EI_1} dx \\
 &= \frac{F^2 l_1^3}{12EI_1} + \frac{F^2 l_2^3}{12EI_1} \\
 &= \frac{F^2}{12EI_1} (l_1^3 + l_2^3)
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

となります。上式の $l_1$ 、 $l_2$ に式(5.89)を代入し

$$U_0 = \frac{F^2}{12EI_0} \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^3 \cdot \frac{\{(2k_0 + k_1)^3 + k_1^3\}}{(k_0 + k_1)^3} \tag{5.92}$$

となります。ここで、上式を荷重 $F$ で微分し、 $EI_0/L = k_0$ と置き換えれば、横部材のひずみエネルギー $U_0$ に起因する入力点の変位は

$$\frac{dU_0}{dF} = \frac{FL^2}{6k_0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{\{(2k_0 + k_1)^3 + k_1^3\}}{(k_0 + k_1)^3} \tag{5.93}$$

と表されます。

以上より、入力点の変位 $\delta$ は、式(5.84)に式(5.87)、(5.93)を代入し

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{dU}{dF} \\
 &= 2 \left( \frac{dU_0}{dF} + \frac{dU_1}{dF} \right) \\
 &= \frac{FL^2}{96k_0} \cdot \frac{4k_0 + k_1}{k_0 + k_1}
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

と計算されます。

## 参考図書

## 嵯峨晃 「構造力学Ⅱ」

仮想仕事の原理、カステリアーノの第2定理、マクスウェルの相反定理といった、エネルギー原理を使った梁のたわみの計算方法を詳しく解説。

ヘンリー・フォード

学び続ける人は、たとえその人が80才でも若いと言える。  
逆に、学ぶことをやめた人は、20才でも年老いている。  
人生で最も素晴らしいことは心をいつまでも若く保つということだ。



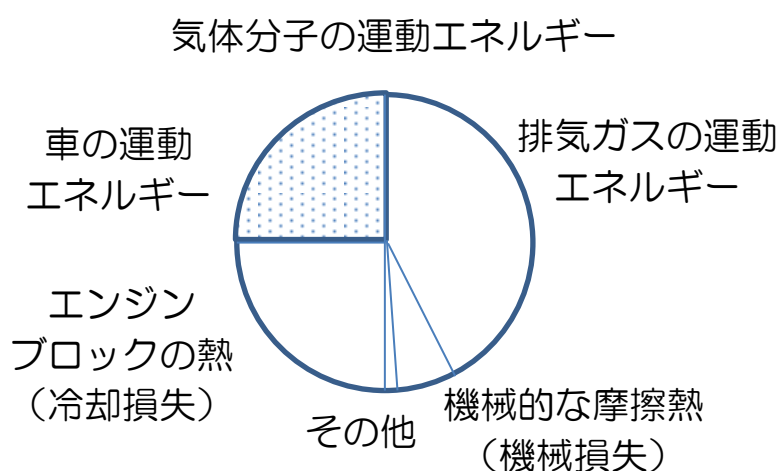


## 6. 燃費の式

分子の運動と $PV = nRT$	比熱比と気体 分子の自由度	膨張する気体の 仕事
オットーサイク ルの熱効率	燃費	冷却損失

車のエンジンは、燃焼による気体分子の運動エネルギーを、機械の運動に変換する装置です。従って、気体分子の運動エネルギーが、最終的に何に用いられたかを整理すれば、車の燃費を考えることができます。

一般に、エネルギーの半分近くは排気ガスとして捨てられています。また、高温の燃焼にさらされるエンジンブロックは、一定の温度以下に保たないと破損してしまうため、常に冷却しなくてはなりません。結果として、車の運動に変換されるエネルギーは、下図に示すように、全体の4分の1程度になります。



この章では、始めに気体分子の運動エネルギーを機械の運動に変換するオットーサイクルの熱効率を、気体分子の運動の観点で整理し、排気ガスとして失われるエネルギーや、冷却損失などについて考えていきます。

## 6.1. 分子の運動と $PV = nRT$

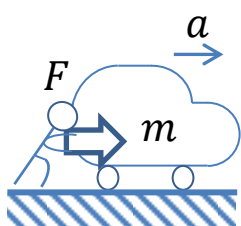
熱力学の有名な物理式  $PV = nRT$  (理想気体の状態方程式) は、ニュートンの運動の第2法則から導くことができます。この導出は19世紀の後半に、マクスウェルとボルツマンによって行われました。それまで、単なる経験式だった理想気体の状態方程式は、彼らが考案した確率論と古典力学を融合させた統計力学によって、気体分子の運動の結果であることが示されました。

熱力学を原子・分子の運動で整理するメリットは、熱力学の公式の上で起こる事柄を、比較的慣れ親しんでいる力学的な感覚で理解できることです。

それでは、 $PV = nRT$ の成り立ちをニュートンの運動の第2法則から、順に考えていきます。

### 6.1.1. ニュートンの運動の第2法則

力と車の加速度



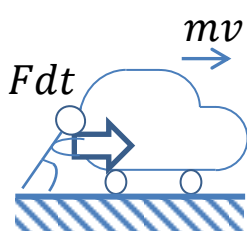
図(欄外)のように人が車を力  $F$  で押したときの運動方程式を考えてみます。単に  $F = ma$  ということになりませんが、詳しい物理の本を見ると、ニュートンの運動の第2法則は、次式の表現で紹介されていると思います。

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (6.1)$$

ここで、上式の右辺の単位から力  $F$  の物理的な意味を考えると、「力  $F$  は、単位時間あたりに車の運動量  $mv$  の変化を及ぼすもの」ということになります。イメージしづらい表現かと思います。そこで、上式の両辺に  $dt$  を乗じて

$$Fdt = d(mv) \quad (6.2)$$

力積と車の運動量



とすれば、「力  $F$  で  $dt$  秒間押すと、車の運動量が  $mv$  増加する」という、いわゆる力積の関係式になります。感覚に合うでしょうか？ 普段何気なく使っている  $F = ma$  ですが、ここでは、「運動量変化を及ぼすものが力」であることを確認しておきます。

### 6.1.2. 気体の圧力と分子の運動量

次に、図(欄外)のように、ピストンに封入された空気の圧力 $P$ で車を押し出す場合を考えてみます。ピストンの面積を $A$ 、空気の圧力を $P$ とすれば、 $F = PA$ であるため、式(6.1)は

$$PA = \frac{d(mv)}{dt} \quad (6.3)$$

$$P = \frac{d(mv)}{A dt}$$

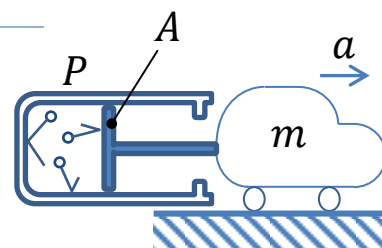
となります。

それでは上式から、気体の圧力 $P$ の意味を考えたいと思います。上式の右辺の単位に着目すると、圧力 $P$ は「単位時間、単位面積の運動量の変化」ということとなります。さて、図(欄外)のピストンの運動量を変化させる要因は何でしょうか？ これは、気体分子の運動量以外に考えられません。

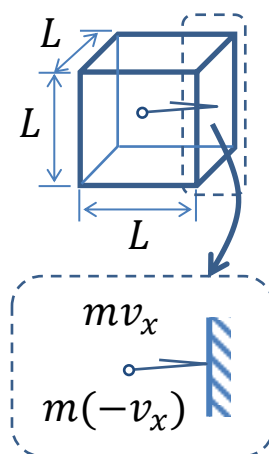
圧力は、図(欄外)のように、長さ $L$ の箱の中の気体分子が壁面に衝突し、跳ね返ったときの運動量変化と考えることができます。今、十分に時間が経ち、気体と箱の温度が同じ（熱平衡）状態にある場合を考えます。熱力学の第0法則より、「温度が同じ場合、エネルギー（熱）のやり取りは行われぬ」ため、衝突による気体分子の運動エネルギー変化はゼロ、と考えることができます。従って、運動量 $mv_x$ を持った気体分子は、同じ速さで跳ね返ることになるため、気体分子の運動量の変化 $d(mv)$ は

$$d(mv) = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x \quad (6.4)$$

となります。一方で、壁の運動量の変化を考えると、運動量保存の法則から、気体分子と壁の運動量の変化の総和は0となります。従って、1回の衝突で、壁は運動量 $2mv_x$ を気体分子から受け取るようになります。

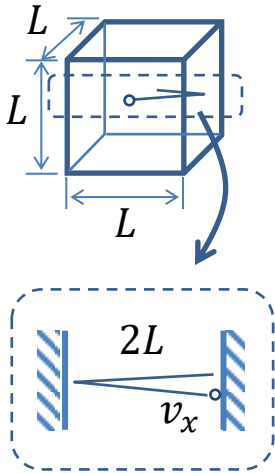


衝突による  
運動量の変化





右側の壁の  
衝突回数



さて、式(6.3)で考えたように、圧力は「単位時間、単位面積あたりに運動量変化を及ぼすもの」です。従って、式(6.4)の運動量変化に加えて、単位時間、単位面積当たりの衝突回数がわかれば圧力を表すことができます。今、圧力を計算しようとしている壁を、図(欄外)の右側の壁と考えれば、単位時間当たりの衝突回数 $c$ は、気体分子の速度 $v_x$ を1往復の距離 $2L$ で割って

$$c = \frac{v_x}{2L} \quad (6.5)$$

と表されます。従って、1個の気体分子が壁を押す力 $f$ は上式と式(6.4)の積として

$$f = \frac{v_x}{2L} \cdot 2mv_x = \frac{mv_x^2}{L} \quad (6.6)$$

と表されます。上式を壁の面積 $L^2$ で割ったものが気体分子1個の圧力 $p$ であるため

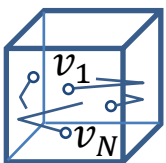
$$p = \frac{f}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} \quad (6.7)$$

となります。ここで、上式の $L^3$ を箱の容積 $V$ に置き換え

$$p = \frac{mv_x^2}{V} = \frac{2}{V} \cdot \frac{1}{2} mv_x^2 \quad (6.8)$$

と表します。上式より、圧力 $p$ は、気体分子の運動エネルギー $mv_x^2/2$ に依存する物理量であることがわかります。また、同じ運動エネルギー $mv_x^2/2$ をもつ気体分子であっても、箱の寸法 $L$ が異なれば単位時間当たりの衝突回数の違いから圧力に差が生じることを示しています。

N個の気体分子



それでは、気体分子がたくさんある場合を考えていきます。単原子分子 $N$ 個分の圧力を $P$ 、 $i$ 番目の気体分子の速度を $v_i$ と置けば、式(6.8)より

$$P = \frac{m}{V} (v_1^2 + \dots + v_N^2) \quad (6.9)$$

です。ここで、上式の $v_1^2 + \dots + v_N^2$ を平均2乗速度を $\overline{v_x^2}$ を使って置き換えれば

$$P = \frac{m}{V} N \overline{v_x^2} \quad (6.10)$$

となります。上式は $x$ 方向にある壁の圧力を表していますが、壁の圧力は方向によらず等しいという事実を踏まえ

$$P = \frac{m}{V} N \overline{v_x^2}$$

$$P = \frac{m}{V} N \overline{v_y^2} \quad (6.11)$$

$$P = \frac{m}{V} N \overline{v_z^2}$$

と考えることができます。従って、上式を全て合計し

$$3P = \frac{m}{V} N (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) \quad (6.12)$$

と表します。ここで、平均2乗速さ $\overline{v^2}$ を

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (6.13)$$

と定義し、式(6.12)を置き換えれば

$$3P = \frac{m}{V} N \overline{v^2} \quad (6.14)$$

$$PV = N \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

と変形されます。

少し $PV = nRT$ に近づいてきました。ここで、ゴールまでの道のりを確認するために、上式と $PV = nRT$ の単位を比較します。まず、上式の右辺の単位は「分子の数 $N$ ×定数×運動エネルギー」です。一方、理想気体の状態方程式は、物質量 $n$ と気体定数 $R$ を用いて

$$PV = nRT \quad (6.15)$$

と表されます。上式の気体定数 $R$ は、アボガドロ数 $N_A$ （物質量 1mol 当たりの分子の数 $6.022144 \times 10^{23}$ 個）×ボルツマン定数 $k$ と定義される物理定数であるため、上式は

$$PV = n \cdot N_A \cdot k \cdot T \quad (6.16)$$

と表すことができます。ここで上式の右辺の単位に着目します。 $n \cdot N_A$ は分子の数そのものですから、「分子の数 $n \cdot N_A$ ×定数×温度 $T$ 」です。以上、式(6.14)と式(6.16)の単位の観察から、気体の運動エネルギー $m\overline{v^2}/2$ と温度 $T$ の関係を示せば、 $PV = nRT$ にたどり着くことができそうです。

### 6.1.3. 気体分子の温度と速度分布の関係

温度 $T$ と気体分子の速度 $v$ の関係を表すマクスウェル・ボルツマン分布(Maxwell-Boltzmann distribution)について紹介します。1860年にマクスウェル(電磁気学で有名なマクスウェルと同一人物です)が、気体分子の速度分布は確率論から導かれる、いわゆるガウス分布の式の形

$$f(v_x, v_y, v_z) = A \exp(-BC^2) \quad (6.17)$$

に従うだろうと予想しました。なぜなら、気体の速度分布が上式に従うと仮定すれば、経験的に知られる理想気体の状態方程式を、ニュートン力学で説明できるからです。

上式は確率の式です。例えば、気体分子の3方向の速度が、同時に $v_x \sim v_x + dv_x$ 、 $v_y \sim v_y + dv_y$ 、 $v_z \sim v_z + dv_z$ の範囲にある確率(0~1.0)は

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (6.18)$$

と表現します。従って、全ての速度の範囲で積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1 \quad (6.19)$$

という特徴を持ちます。一例を示すと、気体分子が $N$ 個あったとき、速度 $v_x \sim v_x + dv_x$ 、 $v_y \sim v_y + dv_y$ 、 $v_z \sim v_z + dv_z$ の範囲となる気体分子の数は

$$Nf(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (6.20)$$

と計算します。

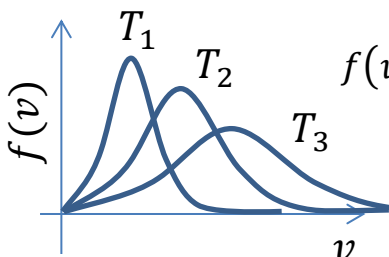
マクスウェルは式(6.17)の係数 $A$ 、 $B$ 、 $C$ を理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ を説明できるように、次のように決めました。

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right\} \quad (6.21)$$

さらにボルツマンは気体分子間の衝突を考慮しても上式が成り立つことを証明しました。上式の正しさは、1931年にZartmanの分子速度の測定などで実証されています。

マクスウェル  
ボルツマンの  
速度分布

$$T_1 < T_2 < T_3$$



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

式変形は割愛しますが、上式の積分から気体の温度 $T$ と気体分子の平均 2 乗速さ $\overline{v^2}$ の関係は

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \quad (6.22)$$

と計算されます。

#### 6.1.4.理想気体の状態方程式

上式(6.22)を式(6.14)に代入すれば

$$\begin{aligned} PV &= N \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2} \\ &= N \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} kT \\ &= NkT \end{aligned} \quad (6.23)$$

となります。ここで上式の気体分子の個数 $N$ を、物質量 $n$ で表します。物質量 1 モル当たりの分子の数は、アボガドロ数 $N_A$ ( $6.022144 \times 10^{23}$ )個と定義されるため、 $N = nN_A$ です。従って上式は

$$PV = nN_A kT \quad (6.24)$$

と表されます。ここで、気体定数 $R = N_A k$ と定義すれば

$PV = nRT$	$(6.25)$
------------	----------

となります。

以上のように、マクスウェルとボルツマンは、気体分子の運動はニュートン力学に従うはずだから、理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ の事実から考えると、気体分子の速度分布は式(6.21)に違いない！と主張したわけです。

しかしながら当時は、原子・分子の存在が証明されておらず、空間は未知のエーテルで満たされていると信じられていた時代です。存在の疑わしい分子と「非科学的な」確率論を熱力学に持ち来むボルツマンの考え方は、激しい批判にさらされました。伝記「ボルツマンの原子理論物理学の夜明け」に描かれるボルツマンの困難を思うと、19 世紀に分子速度の測定器がなかったことが悔やまれます。

## 6.2. 比熱比 $\kappa$ と気体分子の自由度 $\alpha$

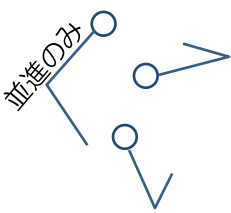
ボルツマンが活躍した 19 世紀後半は理論物理学の幕開けと言われています。理論物理学とは、理論的な模型（モデル）や理論的な仮定を基に理論を構築し、既知の実験事実や、自然現象などを説明する方法です。

それまでは、観測できるものから、現象間の関係を見出す、試行錯誤の実験物理学が主流でした。

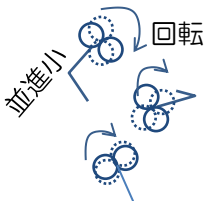
例えば、オットーサイクルの熱効率の式に含まれる比熱比 $\kappa$ は、実験物理学の過程で生まれた、測定できる物性値のひとつであると思います。結果として、比熱比の高い気体ほど、たくさんの仕事を行うことができますが、このメカニズムは、気体分子の運動を考えることで、シンプルに理解することができます。

### 6.2.1. 気体の内部エネルギーと気体分子の自由度 $\alpha$

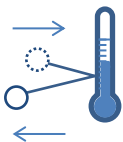
単原子分子



2原子分子



単原子分子



同じ熱（エネルギー）を与えても、温まりやすい液体や固体があることから、「温度はエネルギーに関する物理量だが、エネルギーそのものではない」ことがわかります。その要因は何でしょうか。

例えば、2原子分子に加えた熱量は、分子間の衝突の作用によって、並進3方向の運動エネルギーだけでなく、回転2方向の運動エネルギーにも配分されると考えられます（電子は原子核上での位置と時間を特定できないため、陽子間の軸周りの回転は自由度としてカウントしません）。従って、運動エネルギーの総和が同じであっても、2原子分子は、単原子分子に比べて、並進方向の運動エネルギーが小さくなります。これらの気体の運動エネルギーの総和を、気体の内部エネルギーと呼びます。

それでは、気体分子の並進方向の速度の大小が、温まりやすさにどのような影響を及ぼすでしょうか。ここでは、温度計にぶつかる気体分子をイメージし、その影響を考えてみます。例えば、温度計のガラス表面に速度 $v$ の単原子分子が鏡面反射する場合、並進方向の運動量の交

換は $2mv$ です。一方、2原子分子の回転運動が同等の運動量を交換するためには、ガラスの表面に当たった後、回転方向が逆向きにならねばなりません。

回転が完全に逆向きになる。そのような確率は、並進方向の鏡面反射に比べ、起きづらいように思われます。そう考えると、ガラス表面との運動量の交換の大部分は、並進運動が占めることとなります。従って、並進速度が小さい2原子分子は、温度計との運動量の交換が小さく、温度計の目盛が上がりづらい、すなわち温度が低い、ということになります。

別の見方をすると、自由度 $\alpha$ の大きい気体分子は、自由度 $\alpha$ の小さい気体分子と同じ温度にするためにたくさんのエネルギーが必要なため、温まりにくく冷めにくい気体ということになります。

ただし自由度 $\alpha$ の大きい気体分子は、温度が低いから熱くないかということ、そうではありません。例えば同じ温度であっても、お湯よりも、中華飯のあんかけなどは、熱く感じられます。これは、人は温度 $T$ を直接感じているのではなく、熱量 $Q$ を感じているからだと思われます。あんかけは、冷えにくいので、口との温度差がなくなるのに時間がかかります。その間熱は移動しつづけるため、熱い。ということになります。

それでは、単原子分子の運動エネルギー $mv^2/2$ と温度 $T$ の関係を式(6.14)から考えてみます。

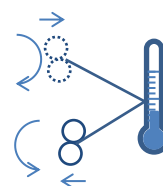
$$PV = N \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2} \quad (6.26)$$

上式の $PV$ に理想気体の状態方程式(6.23)を代入すれば

$$\begin{aligned} NkT &= N \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2} \\ \therefore \frac{1}{2} m \overline{v^2} &= \frac{3}{2} kT \end{aligned} \quad (6.27)$$

となります。ここで上式の $\overline{v^2}$ は、式(6.13)で定義したように3方向の速度成分を合わせた「速さ」です。圧力は方向によらず等しい、という事実から $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ と考えられるため、単原子分子の並進方向の1方向当たりの運動エネルギーは $kT/2$ [J]ということになります。

## 2原子分子



### 6.2.2. 定積モル熱容量 $C_v$

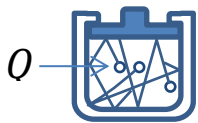
初期状態

$U$



加熱

$Q = \Delta U$



気体の比熱である定積モル熱容量  $C_v$  を気体分子の運動の自由度  $\alpha$  に関連付けて整理します。

図(欄外)のように圧力鍋の中の物質量  $n$  モルの気体に、熱量  $Q$  を与えたときの気体の温度がどれだけ上昇するかを考えます。容器の熱容量が気体分子に比べて無視できるほど小さいと仮定すれば、与えた熱量  $Q$  は全て気体の内部エネルギーを  $\Delta U$  上昇させると考えられるため

$$Q = \Delta U \quad (6.28)$$

です。

圧力鍋の中には  $N$  個の単原子分子があるとすれば、その内部エネルギー  $U$  は式(6.27)に  $N$  を乗じて、ボルツマン定数  $k = R/N_A$  で置き換えれば

$$U = N \frac{3}{2} kT = N \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} T \quad (6.29)$$

と表されます。上式の  $N/N_A$  は物質量を表すため、 $N/N_A = n$  と置き換えれば

$$\begin{aligned} U &= n \frac{3}{2} RT \\ \therefore \Delta U &= n \frac{3}{2} R \Delta T \end{aligned} \quad (6.30)$$

となります。ここで、上式の気体分子の並進方向の自由度を表す係数 3 を自由度  $\alpha$  と置き換え

$$\Delta U = n \frac{\alpha}{2} R \Delta T \quad (6.31)$$

と表します。上式を式(6.28)に代入すれば

$$\begin{aligned} Q = \Delta U &= n \frac{\alpha}{2} R \Delta T \\ \frac{Q}{n \Delta T} &= \frac{\alpha}{2} R \end{aligned} \quad (6.32)$$

となります。

ここで、1モルの気体の温度を1度上げるのに必要な熱量を定積モル熱容量(molar heat capacity at constant volume)  $C_v$  と定義し、上式に気体定数  $R = 8.314$  を代入すれば

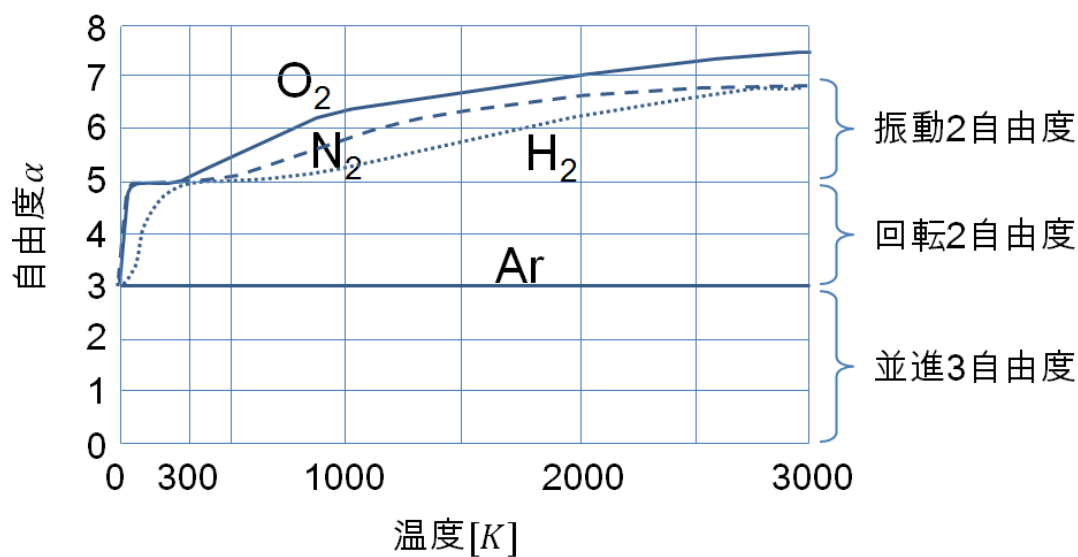
$$C_v \equiv \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\alpha}{2}R = 4.157\alpha \quad (6.33)$$

と表すことができます。参考として、代表的な気体の定積モル熱容量 $C_v$ の測定値と、測定値を上式に代入して得られる気体分子の運動の自由度 $\alpha$ を示します。

	温度[K]	$C_v$ [J/mol/K]	自由度 $\alpha$
ヘリウム He	93	12.6	3.031
アルゴン Ar	288	12.5	3.087
水素 H <sub>2</sub>	273	20.3	4.883
酸素 O <sub>2</sub>	289	21.1	5.075
窒素 N <sub>2</sub>	289	20.6	4.955

上の表より、単原子分子の自由度は3、2原子分子の自由度は5に近い値です。先に述べたように2原子分子は回転方向の2自由度を持つと考えると、上記の温度では、全ての自由度にエネルギーが等しく配分されるため、定積モル熱容量 $C_v$ が大きいと解釈することができます。

ただし、温度の高い領域では、上式から算出される2原子分子の自由度は、下図のように5以上となり、高温になるほど、温まりにくい気体に変化します。



この現象のメカニズムは、量子力学の分野において、原子間の振動や、さらに高い温度での電子の速度と軌道半径の変化によって説明されています。

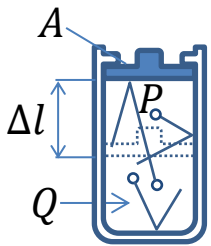


### 6.2.3. 定圧モル熱容量 $C_p$ と比熱比 $\kappa$

初期状態



定圧膨張



$$Q = \Delta U + W$$

実験物理学における測定上の都合で出てきたと考えられる物性値、定圧モル熱容量 $C_p$ と比熱比 $\kappa$ を、気体分子の運動の自由度 $\alpha$ を使って整理します。

図(欄外)のように圧力鍋の蓋が固定されておらず、上下方向に自由に動くとし、熱量 $Q$ をゆっくり加えることで、結果として圧力 $P$ 一定で $\Delta l$ 押し上げたとし、このときの気体の温度はいくらになるのでしょうか？

前項と異なり、熱量 $Q$ の一部は、「ふたを持ち上げる」という仕事に使われるため、気体の温度は、ふたが動かない場合よりも小さくなるのが推測されます。ふたの位置エネルギーの増分を $\Delta W$ とすれば、エネルギー保存の観点から

$$Q = \Delta U + \Delta W \quad (6.34)$$

の関係が成り立ちます。上式は、熱力学の第1法則と呼ばれる式で、一般に、「与えた熱量 $Q$ は、気体の内部エネルギーの上昇 $\Delta U$ と外部への仕事 $\Delta W$ の総和に等しい」と説明されます。

図(欄外)のように、圧力一定でなべを持ち上げた仕事は $\Delta W = PA\Delta l \equiv P\Delta V$ であるため、これを上式に代入すれば

$$Q = \Delta U + P\Delta V \quad (6.35)$$

となります。また、上式に気体分子の内部エネルギーを自由度 $\alpha$ で表現した式(6.31)と、理想気体の状態方程式 $P\Delta V = nR\Delta T$ を代入すれば

$$\begin{aligned} Q &= n\frac{\alpha}{2}R\Delta T + nR\Delta T \\ \therefore \frac{Q}{n\Delta T} &= \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)R \end{aligned} \quad (6.36)$$

となります。ここで、圧力一定で1モルの気体の温度を1度上げるのに必要な熱量を定圧モル熱容量 $C_p$  (molar heat capacity at constant pressure)と定義し、上式に気体定数 $R = 8.314$ を代入すれば

$$C_p \equiv \frac{Q}{n\Delta T} = \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)R = 4.157(\alpha + 2) \quad (6.37)$$

と表すことができます。上式より、式(6.33)の定積モル熱容量  $C_v = 4.157\alpha$  に比べて、蓋を持ち上げる仕事の分(+2)だけ、熱が必要になります。

ここで比熱比  $\kappa$  は、定圧モル熱容量  $C_p$  を定積モル熱容量  $C_v$  で割った物理量として定義されるため、上式を式(6.33)で割って

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{4.157(\alpha + 2)}{4.157\alpha} = \frac{\alpha + 2}{\alpha} \quad (6.38)$$

と表されます。上式からわかるように、比熱比  $\kappa$  は気体分子の自由度  $\alpha$  に依存したシンプルな物性値です。参考として、代表的な気体の比熱比  $\kappa$  の測定値と、測定値を上式に代入して得られる気体分子の運動の自由度  $\alpha$  を示します。

	温度[K]	比熱比 $\kappa$	自由度 $\alpha$
ヘリウム He	93	1.66	3.030
アルゴン Ar	288	1.67	2.985
水素 H <sub>2</sub>	273	1.41	4.878
酸素 O <sub>2</sub>	289	1.396	5.051
窒素 N <sub>2</sub>	289	1.405	4.938



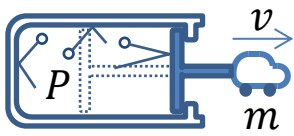
エルンスト・マッハ

科学は観測できる事実に依拠すべきである。

ルートヴィヒ・ボルツマン

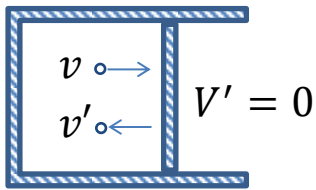
科学は絶対の真理ではない。科学者は、仮説による近似を段階的に重ねることで、真実に近づいていく。

### 6.3. 膨張する気体の仕事



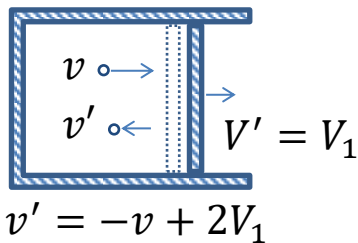
動かない場合

$$V = 0$$



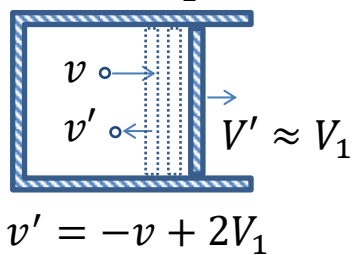
動かした場合

$$V = 0$$



動いている場合

$$V = V_1$$



図(欄外)のように、気体分子をピストンにぶつけて車を押し出す、これが、エンジンの動力で車を動かす基本的な考え方です。一般には、「気体の膨張による仕事」がピストンを動かすというふうに表現します。

始めに、気体分子がピストンの壁面に衝突するときの速度の変化を整理しておきます。衝突前の気体分子の速度を $v$ 、衝突後を $v'$ 。衝突前の壁面の速度を $V$ 、衝突後を $V'$ とし、衝突時のエネルギー損失をゼロとすれば、2体間の速度は、衝突の式(4.17)

$$v - V = -(v' - V') \quad (6.39)$$

に従います。

例えば、図(欄外)のようにピストンが動かない場合は、上式に $V = V' = 0$ を代入し、衝突後の気体分子の速度 $v'$ は

$$v - 0 = -(v' - 0) \quad (6.40)$$

$$v' = -v$$

と表されます。これが、6.1節で述べた鏡面反射です。

このとき、壁面は動かないので、気体の外部への仕事はゼロ。従って、内部エネルギーの変化もゼロです。

ではここで、少し気体分子が壁面を動かしたとします。図(欄外)のように、壁面の衝突前の速度を $V = 0$ 、衝突後の速度を $V' = V_1$ として式(6.39)に代入すれば

$$v - 0 = -(v' - V_1) \quad (6.41)$$

$$v' = -v + V_1$$

となります。上式より鏡面反射に比べて気体分子の速度は $V_1$ だけゆっくりになります。

また今度は、壁面が予め速度 $V_1$ で動いており、気体分子1個の衝突では、あまり速度が変わらない場合を考えます。図(欄外)のように、壁面の衝突前の速度を $V = V_1$ 、衝突後の速度を $V' = V_1$ として式(6.39)に代入すれば

$$v - V_1 = -(v' - V_1) \quad (6.42)$$

$$v' = -v + 2V_1$$

となります。上式と式(6.41)と比べてどうでしょうか？

不思議に思われますが、壁面が予め動いている方が、衝突した気体分子の速度は遅くなる。すなわち、効率よくピストンの運動エネルギーに変換されます。

### 6.3.1.自由膨張する気体の温度と圧力

準備が整いました。図(欄外)のように、断熱状態でピストンが気体分子の速度よりも速く動いた場合の気体の圧力と温度を考えます。このとき、気体はピストンとの間にできた空間を自由に進んでいく(自由膨張)だけなので、気体分子がピストンになす仕事はゼロです。

また、気体分子の運動エネルギーは、容積が小さかった時と比べて、全く変化がありません。従って、気体分子の運動エネルギーは温度そのものであることから、温度変化もゼロになります。

ただし、ピストンまでの距離が長くなり、単位時間当たりの衝突回数は減少するため、圧力は低下します。

以上より、自由膨張では、温度は変わらず、圧力は低下します。この「容積が増えても温度一定」という状況は、一見不思議に思われますが、気体分子の運動を考えると、納得できる結果ではないでしょうか。

それでは、自由膨張での圧力 $P$ と容積 $V$ の関係を、熱力学の第1法則 $Q = \Delta U + W$ を使って考えてみます。熱は与えていないので $Q = 0$ 、ピストンは気体分子にぶつかることなく、勝手に動いたため、外部への仕事 $W = 0$ 。従って

$$0 = \Delta U + 0 \quad (6.43)$$

$$dU = 0 \quad \therefore \text{温度変化 } 0$$

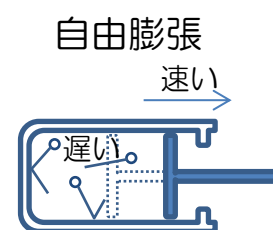
となります。このように、熱力学の第1法則からも、自由膨張では温度が一定になることが示されます。また、圧力 $P$ は、理想気体の状態方程式に初期の温度を $T_0$ を代入し

$$P = \frac{nRT_0}{V} \quad (6.44)$$

と求まります。

アイザック・ニュートン

もし私が価値ある発見をしたのであれば、それは才能ではなく忍耐強く注意を払っていたことによるものだ。



ピストンとの衝突なし

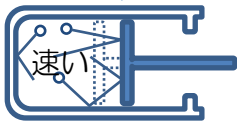


### 6.3.2.断熱膨張する気体の温度と圧力

では次に、ピストンが断熱状態で、気体分子の速度よりもゆっくり動いた場合を考えます。これを断熱膨張と呼びます。前項の自由膨張と異なり、気体分子はピストンの動きに追いついて衝突します。衝突によって、気体分子の運動エネルギーがピストンの運動エネルギーに変換されるため、気体分子の速さが減少し、温度と圧力が低下すると予想されます。

断熱膨張

遅い



衝突あり

それでは、断熱膨張時の圧力 $P$ と温度 $T$ を計算してみます。図(欄外)に示すように、初期の気体分子の内部エネルギーを $U$ 、圧力を $P$ とします。次の瞬間に、ピストンが動いてシリンダの容積が微かに $dV$ 増えたとすると、気体は外部への仕事を行ったため、その内部エネルギー $U'$ は

$$U' = U - PdV \quad (6.45)$$

に低下すると考えられます。ここで、 $dU = U' - U$ と定義し、上式を次のように置き換えます。

$$0 = U' - U + PdV \quad (6.46)$$

$$0 = dU + PdV$$

上式の $PdV$ は外部への仕事であるため、上式は熱を与えない場合(左辺=0)の熱力学の第1法則の式を表しています。上式に気体分子の内部エネルギー $U$ を自由度 $\alpha$ で表現した式(6.31)を代入し

$$0 = n \frac{\alpha}{2} R(dT) + P \quad (6.47)$$

と表します。ここまでは、圧力 $P$ は一定として扱ってきましたが、「容積が $dV$ 増えれば、単位時間当たりの衝突回数が減少し、 $P$ が低下する」ことを考慮するために、上式に $P = nRT/V$ を代入し

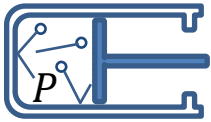
$$0 = n \frac{\alpha}{2} R(dT) + \frac{nRT}{V} dV \quad (6.48)$$

$$0 = \frac{1}{T} dT + \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{V} dV$$

とします。上式を積分し積分定数を $c_0$ 、 $c_1$ 、 $c_2$ と置けば

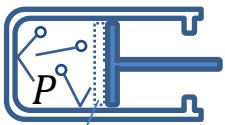
初期状態

$U$



一瞬後の状態

$$U' = U - PdV$$



$dV$

$$0 = \int \frac{1}{T} dT + \frac{2}{\alpha} \int \frac{1}{V} dV \quad (6.49)$$

$$c_0 = \ln T + c_1 + \frac{2}{\alpha} \cdot \ln V + c_2$$

となります。ここで、上式の定数項をまとめて $C$ と置き換えれば

$$C = \ln T + \frac{2}{\alpha} \cdot \ln V$$

$$C = \ln T + \ln V^{\frac{2}{\alpha}}$$

$$C = \ln TV^{\frac{2}{\alpha}} \quad (6.50)$$

$$\therefore TV^{\frac{2}{\alpha}} = \text{一定}$$

となります。上式が自由度 $\alpha$ を用いた断熱膨張におけるの温度 $T$ と容積 $V$ の関係式です。

ここで確認のため、上式を一般の教科書で説明される、気体の比熱比 $\kappa$ を用いた表現に変換します。上式を変形し

$$TV^{\frac{2}{\alpha}} = TV^{\frac{2+\alpha-\alpha}{\alpha}} = TV^{\frac{2+\alpha}{\alpha}-1} = \text{一定} \quad (6.51)$$

とします。上式に、式(6.38)を代入すれば

$TV^{\kappa-1} = \text{一定}$	$(6.52)$
-----------------------------	----------

となり、式(6.50)が一般の教科書の断熱膨張の式と同じであることが確認できます。

次に、圧力 $P$ と容積 $V$ の関係を考えます。式(6.50)に理想気体の状態方程式 $T = PV/(nR)$ を代入します。

$$\frac{PV}{nR} V^{\frac{2}{\alpha}} = \text{一定}$$

$$PV^{\frac{2}{\alpha}+1} = \text{一定} \quad (6.53)$$

$$\therefore PV^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} = \text{一定}$$

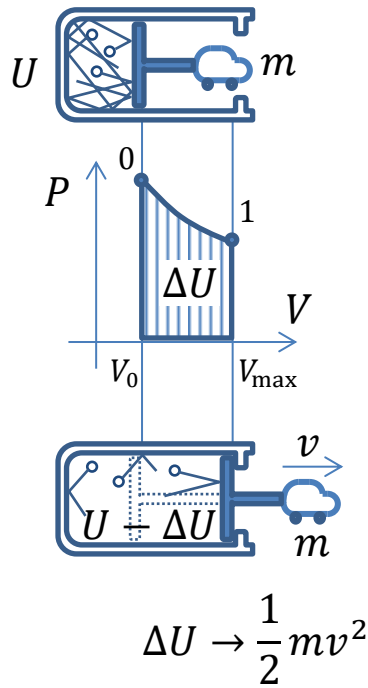
同様に、一般の教科書の表現を確認しておきます。上式に式(6.38)を代入し

$PV^{\kappa} = \text{一定}$	$(6.54)$
---------------------------	----------

となります。

## 6.3.3. 断熱膨張する気体の仕事

内部エネルギーが車の運動エネルギーになる。



図(欄外)のように、断熱状態でシリンダの容積が変化した時、気体が外部へ行う仕事 $W$ を考えます。熱力学の第1法則 $Q = \Delta U + W$ において、与える熱量 $Q = 0$ であるため

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta U + W \\ W &= -\Delta U \end{aligned} \quad (6.55)$$

の関係となります。上式より図(欄外)のように、「気体分子の運動エネルギーが $\Delta U$ が減った分だけ、車の運動エネルギーが $W$ 増加した」と考えることができます。ここで、上式に気体の内部エネルギーを自由度 $\alpha$ で表現した式(6.31)を代入すれば

$$W = -\Delta U = -n \frac{\alpha}{2} R \Delta T \quad (6.56)$$

となります。また、初期の温度を $T_0$ 、膨張後の温度を $T_1$ とし、上式の $\Delta T$ を $T_1 - T_0$ に置き換えれば

$$W = -n \frac{\alpha}{2} R (T_1 - T_0) \quad (6.57)$$

です。上式より、膨張後の気体の温度 $T_1$ が小さいほど、気体分子の運動エネルギーが車の運動エネルギー $W$ に変換されることを示しています。例えば、図(欄外)のようにシリンダの容積が $V_0 \rightarrow V_{\max}$ と膨張した場合の温度 $T_1$ は式(6.50)から

$$\begin{aligned} T_0 V_0^{\frac{2}{\alpha}} &= T_1 V_{\max}^{\frac{2}{\alpha}} \\ T_1 &= \left( \frac{V_0}{V_{\max}} \right)^{\frac{2}{\alpha}} T_0 \end{aligned} \quad (6.58)$$

と計算されます。従って、上式を式(6.57)に代入すれば、気体が外部へ行う仕事、すなわち車の運動エネルギーの増分 $W$ は

$$W = n \frac{\alpha}{2} R T_0 \left\{ 1 - \left( \frac{V_0}{V_{\max}} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (6.59)$$

となります。ここで、上式の $n\alpha RT_0/2$ を初期の気体の内部エネルギー $U_0$ 、また、 $V_{\max}/V_0$ を膨張比 $\beta$ (expansion ratio)と定義して置き換えれば

$$W = U_0 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (6.60)$$

となります。先に述べたように断熱膨張では、初期の気体の内部エネルギー $U_0$ が外部への仕事に変換されるため、例えば上式の大括弧の値が0.3ならば、3割が外部への仕事に変換され、7割が気体の内部エネルギーとして留まる、ということになります。

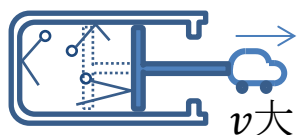
上式の仕事 $W$ が大きくなる状況を、小さな気体分子がピストンにぶつかる状況を思い浮かべて考えてみます。

初期の温度 $T_0$ が高いほど気体の運動エネルギーが高くなるため、内部エネルギー $U_0$ 大となり、たくさんの仕事を行うポテンシャルを秘めています。

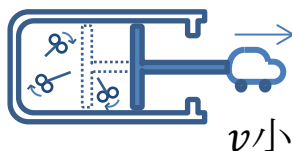
その内部エネルギー $U_0$ をピストンの運動エネルギーに変換するためには、気体分子がピストンにぶつかる必要があります。従って、膨張比 $\beta$ が大きいほど、トータルの衝突回数が増加して、得られる仕事が大きくなります。例えば、シリンダの最大容積が無限( $\beta = \infty$ )の場合、気体の内部エネルギー $n\alpha RT_0/2$ は全て、ピストンの運動エネルギーに変換されます。

また、自由度 $\alpha$ の小さい単原子分子は、気体分子の並進速度が大きく、ピストンに激しく衝突するため、同じ膨張比 $\beta$ でもたくさんの仕事を行うことができます。

単原子分子の  
並進運動  
エネルギー大



2原子分子の  
並進運動  
エネルギー小



アイザック・ニュートン

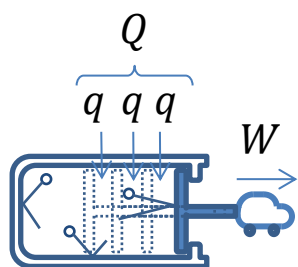
我々はあまりにも多くの壁を造るが、架け橋の数は十分ではない。





6.3.4.断熱膨張時に、熱 $Q$ を加えたときの効率

温度一定に  
なるように加熱

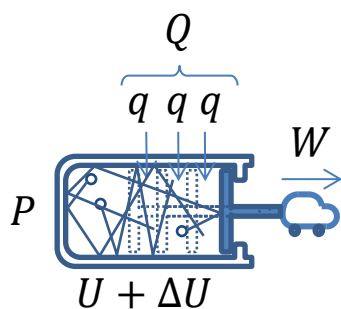
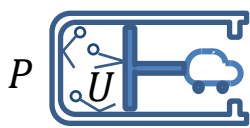


分子速度一定

$$\therefore \Delta U = 0$$

$$\therefore Q = W$$

圧力一定に  
なるように加熱  
初期状態



分子速度増大

$$\therefore \Delta U \neq 0$$

$$\therefore Q = \Delta U + W$$

前項では、ピストンが気体分子より遅く動いた場合（断熱膨張）の、気体の内部エネルギーと仕事の関係を確認しました。

この項では、断熱膨張でシリンダの容積が変化しているときに、何らかの方法で熱量 $Q$ を与えた場合に、その熱量 $Q$ が、どれだけの仕事 $W$ に変換されるか？を考えます。

例えば、断熱膨張で、低下する温度を補うように熱量 $Q$ を加えた場合（等温膨張）の効率 $W/Q$ を考えます。熱力学の第1法則 $Q = \Delta U + W$ において、温度変化0、すなわち $\Delta U = 0$ であるため

$$Q = 0 + W \quad (6.61)$$

となり、与えた熱量 $Q$ は全て仕事に変換されます。従って

$$\frac{W}{Q} = 1 \quad (6.62)$$

となります。また、このとき、気体分子の速度、すなわち温度は一定ですが、シリンダの容積は初期に比べて大きいため、衝突回数の低下によって圧力は減少しています。

一方、低下する圧力を補うように熱量 $Q$ を加えた場合（定圧膨張）の効率 $Q/W$ を考えます。

シリンダの容積が増えても圧力を等しくするには、気体分子の速さを増して、衝突回数の減少を挽回する必要があります。従って、等温膨張に比べて、気体分子の速度、すなわち温度を高くする必要があります。図(欄外)のように、等圧変化では、気体の圧力 $P$ 一定でピストンを距離 $\Delta L$ 動かしたと考えれば、外部への仕事 $W$ は

$$W = P\Delta L = P\Delta V \quad (6.63)$$

と表されます。従って、上式を熱力学の第1法則 $Q = \Delta U + W$ に代入すれば

$$Q = \Delta U + P\Delta V \quad (6.64)$$

となります。上式より、与えた熱量 $Q$ は、外部への仕事だけでなく、気体の内部エネルギーの上昇にも費やされる

ことがわかります。ここで、上式に理想気体の状態方程式  $P\Delta V = nR\Delta T$  と、気体の内部エネルギーを自由度  $\alpha$  で表現した式(6.31)を代入すれば

$$Q = n \frac{\alpha}{2} R\Delta T + nR\Delta T \quad (6.65)$$

となります。以上より、定圧膨張での効率  $P\Delta V/Q$  は

$$\begin{aligned} \frac{P\Delta V}{Q} &= \frac{nR\Delta T}{n \frac{\alpha}{2} R\Delta T + nR\Delta T} \\ &= \frac{1}{\frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{2}{\alpha + 2} = \frac{\alpha + 2 - \alpha}{\alpha + 2} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 2} \end{aligned} \quad (6.66)$$

となります。

ここで確認のため、一般の教科書で説明される、気体の比熱比  $\kappa$  を用いた表現に変換します。上式に、式(6.38)を代入すれば

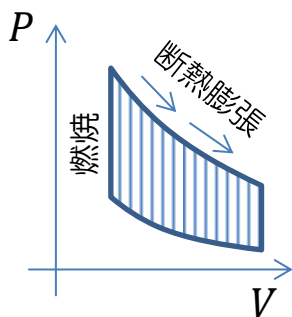
$$\frac{P\Delta V}{Q} = 1 - \frac{1}{\kappa} \quad (6.67)$$

となります。上式より比熱比  $\kappa$  が大きい気体ほど、定圧膨張時の効率は 1 に近づきます。

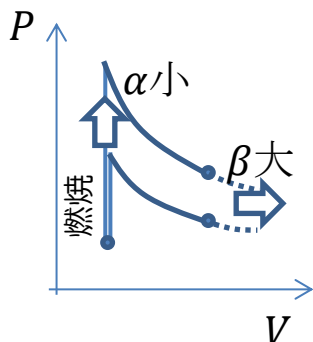
以上より、等温膨張となるように熱を加えた場合が最も効率が高く、それ以上に熱を加える定圧膨張では、効率が低下します。最高の熱効率を追求してカルノーが考案したカルノーサイクルでは、等温膨張過程が 2 回使われており、最も熱効率の高いサイクルとして知られており、冷蔵庫やエアコンに応用されています。

一方、自動車のガソリンエンジンは、等温膨張も定圧膨張も使わないオットーサイクルを利用します。単なる断熱膨張過程を 2 回使ったシンプルなサイクルです。次節では、このオットーサイクルの熱効率を考えたいと思います。

## オットーサイクル



## 自由度 $\alpha$ と 膨張比 $\beta$ の影響



## 6.4. オットーサイクルの熱効率

自動車のガソリンエンジンで用いられる、オットーサイクルは図(欄外)のようなPV線図で表されます。シリンダの容積が最小となるときに、ガソリンと空気の混合気を燃焼させて熱量 $Q$ を与え、気体の運動エネルギーを一気に上昇させたのち、断熱膨張を用いて気体の内部エネルギーをピストンの運動エネルギーに変換します。

断熱膨張を使って仕事を行う以上、オットーサイクルの熱効率は、断熱膨張の仕事の式(6.60)に含まれる、気体の自由度 $\alpha$ と膨張比 $\beta$ に支配されます。図(欄外)に示すように、気体分子の自由度 $\alpha$ が小さいほど、同じ熱量 $Q$ で上昇する気体の圧力は高くなるため、膨張過程で行われる仕事は大きくなります。また、膨張比 $\beta$ が大きいほど、気体分子とピストンの衝突回数が増加するため、気体の運動エネルギーを仕事に変換できます。

この節では、気体分子の運動エネルギーを効率よく取り出すための車のエンジンの考え方を整理します。

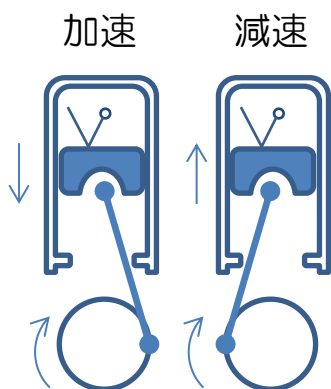
### 6.4.1. 効率の良いピストンの押し方

エンジンの基本的な考え方は、手動ブレーキのない競技用自転車と同じです。足でペダルを回転させれば自転車は動き始めます。ブレーキをするとき、ペダルの動きを妨げるように力を加えます。

ここで、ペダルをピストンに見立てれば、ピストンが下に動く時に気体分子が衝突すれば加速、ピストンが上に動く時に衝突すれば減速ということになります。

従って、ピストンが下に動く時、気体分子の並進速度は大きい状態が望ましく、ピストンが上に動く時はシリンダ内が真空になることが望ましいことになります。

すなわち、究極的には、ピストンの上死点で混合気を出現させ、瞬時に燃焼。ピストンが下死点に達したら気体を消滅。これが理想です。



### 6.4.2. オットーサイクルの熱効率

しかしながら、混合気を上死点で出現させることは現実には難しいため、大気圧に近い、図(欄外)の右下の(1)で混合気を注入し、(1)→(2)で圧縮することになります。このとき気体分子の衝突はピストンの動きを妨げようとする(あるいは、ピストンが気体分子の運動エネルギーを増やす仕事を行う)ため、ピストンの速度は低下します(低下しすぎるとエンストです)。

上死点(2)で瞬時に燃焼することで、気体分子の運動エネルギーは大きくなり(2)→(3)、続く断熱膨張の過程(3)→(4)で、ピストンを押し出すという仕事をします。このとき、膨張比 $\beta$ は有限のため、気体分子の運動エネルギーを全て仕事に変えることはできず、初期の(1)に比べて、温度、圧力の高い状態(4)になります。

さて、始めの状態(1)に戻らねばなりません。(4)→(1)は「下死点で瞬時に燃焼後のガスと新しい混合気を入れ替える」という、実現不可能な吸排気行程を意味しますが、一般の教科書に倣って、まずは、図(欄外)のオットーサイクルにおける熱効率を計算してみます。

熱効率は、1サイクル当たりの熱量 $Q$ に対するピストンへの仕事 $W$ として $W/Q$ と定義されます。まず(1)→(2)の気体分子の衝突では、ピストンの動きを妨げるため、その負の仕事 $W_{12}$ は、式(6.60)に $T_0 = T_2$ を代入し

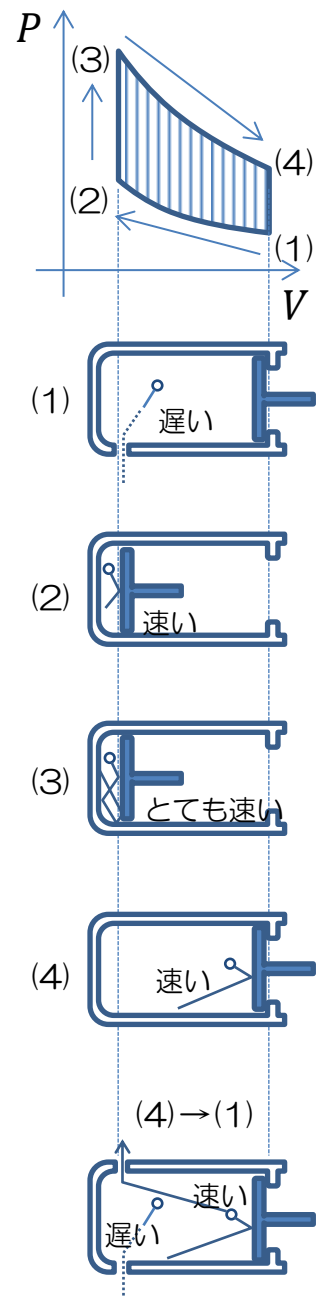
$$W_{12} = -n \frac{\alpha}{2} RT_2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (6.68)$$

です。また、(3)→(4)では気体分子の衝突がピストンの動きを加速させるため、その正の仕事 $W_{34}$ は式(6.60)に $T_0 = T_3$ を代入し

$$W_{34} = n \frac{\alpha}{2} RT_3 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (6.69)$$

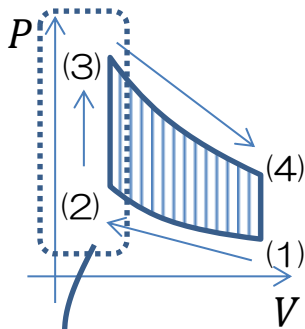
となります。従って、1サイクルでの仕事 $W$ は式(6.68)と式(6.69)の和

### オットーサイクル



$$W = W_{12} + W_{34} = n \frac{\alpha}{2} R (T_3 - T_2) \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (6.70)$$

### オットーサイクル



となります。ここで、上式の $T_3 - T_2$ に着目します。オットーサイクルでは、図(欄外)のようにピストンの上死点(2)において、燃焼による熱量 $Q$ を瞬時に加えるものとするれば、温度の上昇量 $T_3 - T_2$ は定積モル熱容量 $C_v$ の式(6.32)の1行目

$$Q = n \frac{\alpha}{2} R \Delta T = n \frac{\alpha}{2} R (T_3 - T_2) \quad (6.71)$$

に従います。従って、上式を式(6.70)に代入すれば

$$W = Q \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right\} \quad (6.72)$$

と表されます。以上より熱効率 $W/Q$ は

$$\frac{W}{Q} = 1 - \left( \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \quad (6.73)$$

となります。上式より、膨張比 $\beta$ が大きいほど、自由度 $\alpha$ が小さいほど熱効率は1に近づきます。

(2)→(3)  
燃焼時の気体の  
並進運動エネルギー



(3)  
単原子  
分子

並進運動  
エネルギー大

(3)  
2原子  
分子

並進運動  
エネルギーやや大

例えば単原子分子のように自由度 $\alpha$ の小さい気体分子は、並進速度が大きく、ピストンとの運動量の交換がたくさん行われるため、熱効率が高くなります。上式に $\alpha = 3$ 、膨張比 $\beta = 10$ を代入すると熱効率は、0.78と計算されます。

一方で、2原子分子のように回転自由度を持つ気体分子では、気体分子の並進速度が小さく、気体の内部エネルギーを使い切ろうと思っても、回転運動にエネルギーが留まるため、単原子分子に比べて得られる(引き出せる)仕事が少なくなります。上式に $\alpha = 5$ 、膨張比 $\beta = 10$ を代入すると熱効率は、0.60と計算されます。従って2原子分子では、半分近くのエネルギーを、(4)→(1)の過程で排気ガスとして捨てることとなります。

上式は、気体分子の運動の自由度 $\alpha$ を用いた特別な表現です。通常の教科書では、比熱比 $\kappa = (2 + \alpha)/\alpha$ を用いて表されるため、上式を次のように変形します。

$$\frac{W}{Q} = 1 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{2}{\alpha}} = 1 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}-1} \quad (6.74)$$

ここで、上式に式(6.38)を代入すれば、オットーサイクルの熱効率を、比熱比 $\kappa$ で表した式が求まります。

$$\frac{W}{Q} = 1 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\kappa-1} \quad (6.75)$$

## 参考図書

### 相良紘 「化学工学のための熱力学」

原子・分子の微視的な働きを意識して書かれた、初学者のための熱力学の教科書。一般的な熱力学の入門書でありながら、マクスウェル-ボルツマンの速度分布や平均自由行程などの、原子・分子の根源的なメカニズムを説明しています。

### 「原子・分子の流れ」 日本機械学会・編

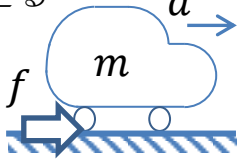
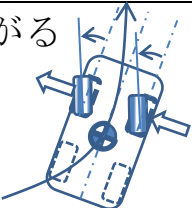
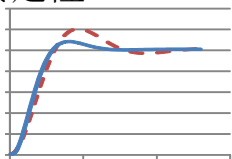
やや専門的な本。「希薄気体力学とその応用」というサブタイトルが示すとおり、この分野における最新の研究成果が述べられています。また、マクスウェル-ボルツマンの速度分布の導出や、量子力学について、わかりやすく簡潔に述べられています。

### 「ボルツマンの原子」 デヴィッド・リンドリー

ボルツマンの伝記。19世紀末に起こった、古典物理学から現代物理学への激動の歴史を鮮明に描写。ニュートン、マクスウェル、マッハ、アインシュタインといった物理界の巨匠が多数登場。



## 7. 人 - 機械の式

走る 	曲がる 	安定性 
操作力	人—機械	

人が車（機械）を運転するのだから、車は人にとって扱いやすい道具でなくてはなりません。

例えば水道の蛇口は、硬すぎず、適度な角度で望む水量が得られるように作られています。普段はあまり気になりませんが、世の中のすべての道具は、人の感覚に合うように作られています。

一方で、車が走る、曲がる、止まるために、扱いやすいアクセルペダル、ステアリング、ブレーキペダルとは何でしょうか。車の扱いやすさを考えるとき、人がどのように車を扱っているか？ 人の特性を物理的に表すことができれば、「人がそうあるならば、機械はどうあるべきか」を考えることができます。

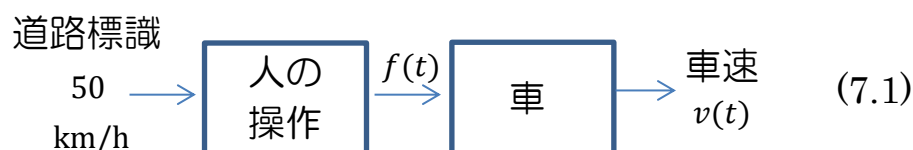
この章では、井口雅一先生の著書「人間—機械 (man-machine) 系」と、初歩的な制御工学の知識を活用し、扱いやすい車の特性に迫ってみたいと思います。



## 7.1. 走る

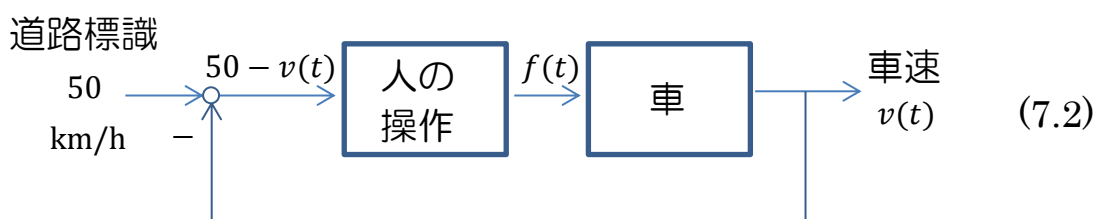
例えば、駐車場から道路に出て⑤の道路標識を見て、50 km/h まで加速することを思い浮かべます。

「標識 50 km/h → 人が認識 → アクセル踏む → エンジンが燃焼 → エンジントルクがタイヤに伝わる → 接地面で駆動力（摩擦力）が発生する → 駆動力が車の質量を押し → 車速」という流れになります。ここでは、途中を省略して簡単に



と表します。このとき、車速が思ったより上がりにくいと感じれば、よりたくさんアクセルを踏むでしょうし、しばらくして 10 km/h 足りないことに気づけば、もう少し踏み増すでしょう。

このような人の操作を、目標の 50 km/h に対して、現在の車速  $v(t)$  が小さいほどアクセルを踏むと解釈し、目標速度との差に応じて何らかの操作を行う状況を模式的に次のように表します。



上記のループがぐるぐる回って、最終的に目標速度となれば、速度差 0 となって人の操作は完了します。

一般に、上記の模式図(7.2)の  $v(t)$ 、 $f(t)$  を、周波数領域の表現  $V(s)$ 、 $F(s)$  に置き換えた図をブロック線図と呼びますが、この章では説明の都合上、時間領域のまま表記し、「模式図」として話を進めます。

### 7.1.1.車の模式図 走る

図(欄外)のように、駆動力 $f(t)$ で走る車の加速度 $a(t)$ は

$$a(t) = \frac{1}{m} f(t) \quad (7.3)$$

です。図(欄外)のように、横軸を時間軸として、破線のインプット $f(t)$ に対して、実線のアウトプットは $1/m$ 倍の $a(t)$ となります。

この何倍の動作を行うブロックを、その大きさを記した三角形で次のように表します。

$$f(t) \rightarrow \triangleleft \frac{1}{m} \triangleright a(t) \quad (7.4)$$

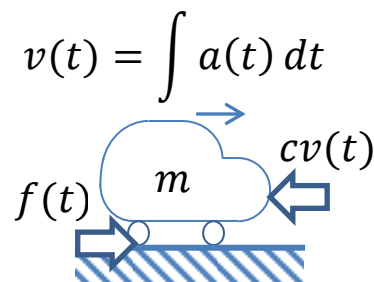
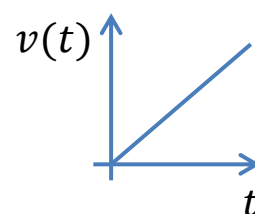
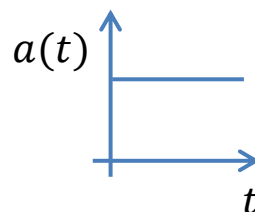
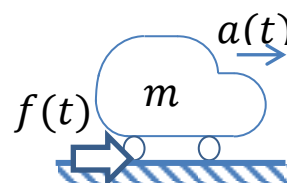
次に値を積分するブロックを考えます。図(欄外)のように一定の加速度のもとでは、速度は一定に増える関係です。この積分の動作を行うブロックを $1/s$ と記した四角形で次のように表します。

$$f(t) \rightarrow \triangleleft \frac{1}{m} \triangleright a(t) \rightarrow \square \frac{1}{s} \triangleright v(t) \quad (7.5)$$

と表します。上の模式図において $f(t) = \text{一定}$ ならば、速度 $v(t)$ は時間に伴って $\infty$ に近づきます。しかし実際の車では、速度に比例した空気抵抗 $cv(t)$ が働くため、速度は一定値に落ち着きます。この状況を次のように表すことができます。

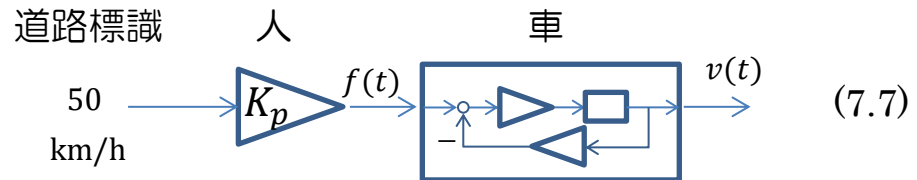
$$f(t) \rightarrow \text{sum} \rightarrow f(t) - cv(t) \rightarrow \triangleleft \frac{1}{m} \triangleright a(t) \rightarrow \square \frac{1}{s} \triangleright v(t) \rightarrow \triangleleft c \triangleright cv(t) \rightarrow \text{sum} \quad (7.6)$$

上の模式図のように、速度 $v(t)$ に減衰係数 $c$ を乗じ力 $f(t)$ から引くことで、ある速度で車に働く力が0となり、車の速度が頭打ちになります。上図のようにアウトプット $v(t)$ を、インプット $f(t)$ に戻す矢印は「アウトプットを一定に保つ」効果をもたらします。



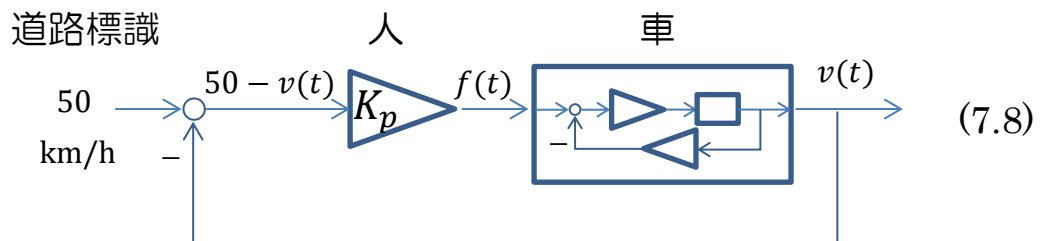
### 7.1.2. 比例動作

前項で考えた車の模式図(7.6)と人を関連させます。章の初めに述べた、「標識 50km/h → 人のアクセル操作 → 車 → 車速」は



と表すことができます。ここで、人が目標速度に対して、アクセルを踏む際の行動を考えてみます。例えば、一般道に比べて、高速道路に合流する場合はアクセルをたくさん踏むと思います。

この行動を、目標速度と現在の速度 $v(t)$ の差に応じてアクセルを踏むと解釈し、次のような模式図を考えます。



それでは、上の模式図を Excel の数値計算で確認してみます。人は、「目標速度 10m/s－現在の車の速度」に対して、1m/sの速度差あたり 1000Nの駆動力を発生させるように車を操作するとします。

	A	B	C	D
1	$m$	1000	kg	車の質量
2	$c$	100	Ns/m	速度の抵抗係数
3	$k$	0	N/m	変位の抵抗係数
4	$dt$	0.1	sec	計算時間ステップ
5	$V_0$	10	m/s	目標速度
6	$K_p$	1000	Ns/m	人の比例ゲイン

「名前の定義」機能を使って B 列のセルに A 列の名前を割り当てます。

次に数値計算部分を作成します。時刻 0 の時点では目標速度と車の速度差は 10m/s です。

	A	B	C	D	E	F
9	時間	加速度	速度	変位	駆動力	速度差
10	0	0	0	0	0	10
11						
12						

時間推移は、車両運動の式で紹介したニューマークの  $\beta$  法を活用します。

$$A = \frac{f(t+dt) - c \left\{ v(t) + \frac{a(t)}{2} dt \right\} - k \left\{ x(t) + v(t)dt + \frac{a(t)}{4} dt^2 \right\}}{m + \frac{dt}{2}c + \frac{dt^2}{4}k} \quad (7.9)$$

$$v(t+dt) = v(t) + \frac{a(t) + A}{2} dt$$

$$x(t+dt) = x(t) + v(t)dt + \frac{a(t) + A}{4} dt^2$$

上式を実行する数式を、A11~F11セルを次のように入力し、列を下方向にコピーして 10sec まで計算したグラフを図(欄外下)に示します。

$$A11 = A10+dt$$

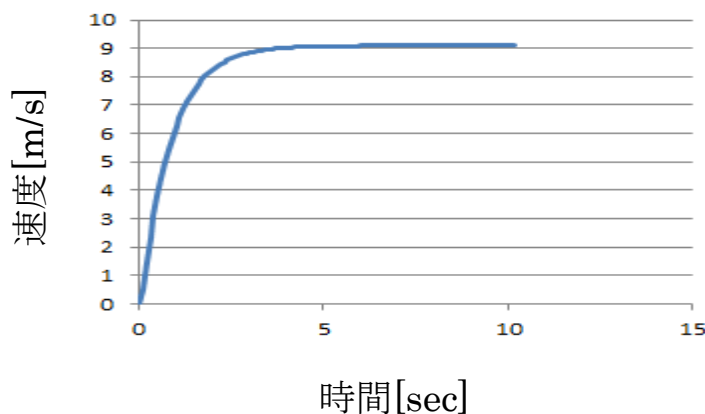
$$B11 = (E11-c*(C10+B10*dt/2)-k*(D10+C10*dt+B10*dt^2/4)) / (m+dt*c/2+dt^2*k/4)$$

$$C11 = C10+(B10+B11)*dt/2$$

$$D11 = D10+C10*dt+(B10+B11)*dt^2/4$$

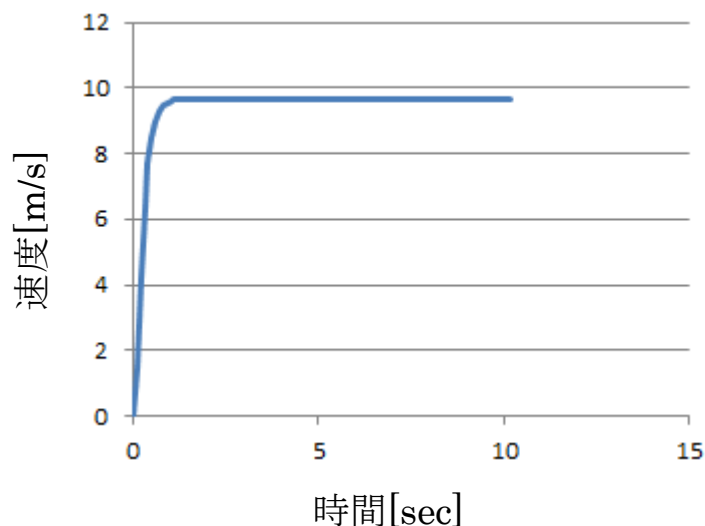
$$E11 = K_p * F10 \quad (\leftarrow \text{速度差に対して } K_p \text{ 倍の駆動力を発生させる})$$

$$F11 = V_0 - C11$$

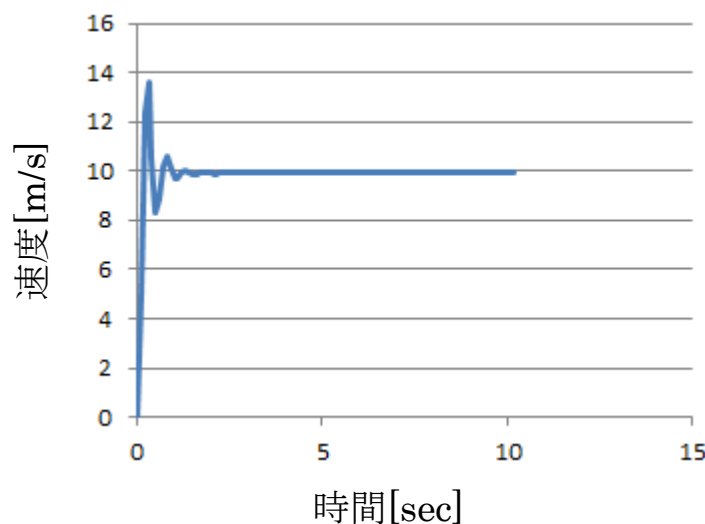


結果として模式図(7.8)の考え方、すなわち目標速度との差に比例する駆動力を与える方法では目標速度 10m/s に達しません。この操作を実際の車で説明すると、目標速度 100km/h になった時点でアクセルを完全にオフしてしまうため、空気抵抗や機械の摩擦損失によって速度は 100km/h より下がります。当然のことながら、目標速度を維持するには、これらの抵抗に釣り合う駆動力を車に与え続けるために、一定のアクセルを保持する必要があります。

従って、単にゲイン  $K_p$  を増やしても目標速度に一致しません。 $K_p = 2000$  の場合、速度差 0.5m/s が残り続けます。

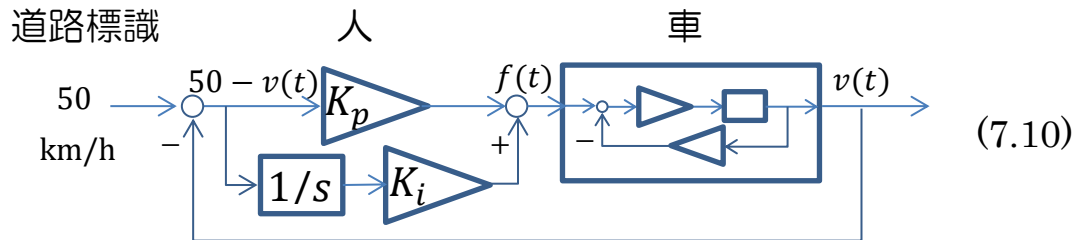


また、 $K_p = 10000$  の場合は、勢いよくアクセルを踏み、一時的に速度超過となりますが、十分時間が経った後も 0.1m/s の差が残ります。



### 7.1.3.積分動作

もし人ならば、いつまでも速度差が縮まらない場合は、アクセルを踏み増すでしょう。この行動を、速度差の積分値に比例してアクセルを踏み増すと解釈し、次のような模式図を考えます。



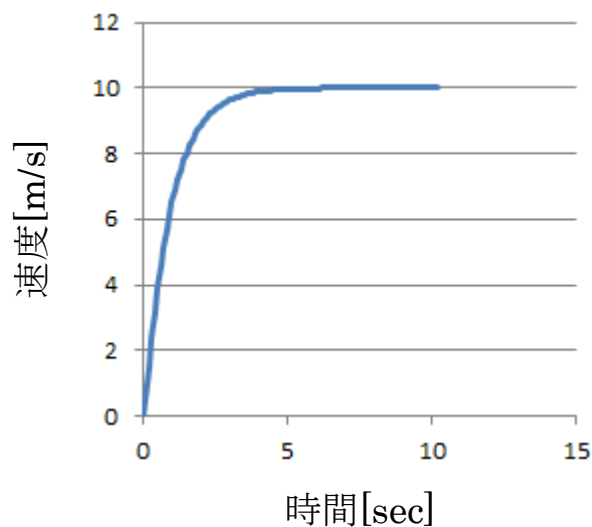
ここで、比例ゲイン $K_p = 1000\text{Ns/m}$ 、積分ゲイン $K_i = 100\text{N/m}$

	A	B	C	D	E	F	G
9	時間	加速度	速度	変位	駆動力	速度差	速度差の累積
10	0	0	0	0	0	10	10
11							

$$E_{11} = F_{10} * K_p + G_{10} * K_i$$

$$F_{11} = V_o - C_{11}$$

$$G_{11} = G_{10} + F_{11}$$



### 7.1.4. 1次遅れ要素

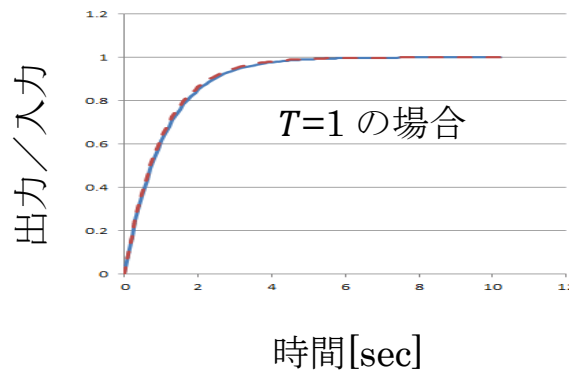
人間の操作の遅れを表したいと思います。人は知覚し、筋肉を動かしてペダルを踏むため、速度差 $50 - v(t)$ を感じた瞬間に、目標の $K_p\{50 - v(t)\}$ の駆動力を発生させることはできません。このように、少し遅れる動作を代表させる要素の1つに1次遅れ要素があります。

$$x(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Ts + 1}} \rightarrow y(t) \quad (7.11)$$

上の1次遅れ要素に、時刻0で $x(t) = 1$ という信号を入力したときの出力 $y(t)$ は

$$y(t) = (1 - e^{-t/T}) \cdot 1 \quad (7.12)$$

となります。一般に上式の $T$ は、入力値の63%に達する時間を表しており、時定数 $T$ と呼ばれます。



入力値を $X$ 、出力値を $Y$ とすれば周波数領域での表現は

$$Y = \frac{1}{Ts + 1} X \quad (7.13)$$

$$\therefore X = YTs + Y$$

となります。従って、上式を逆ラプラス変換した時間領域での表現は

$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} T + y(t) \quad (7.14)$$

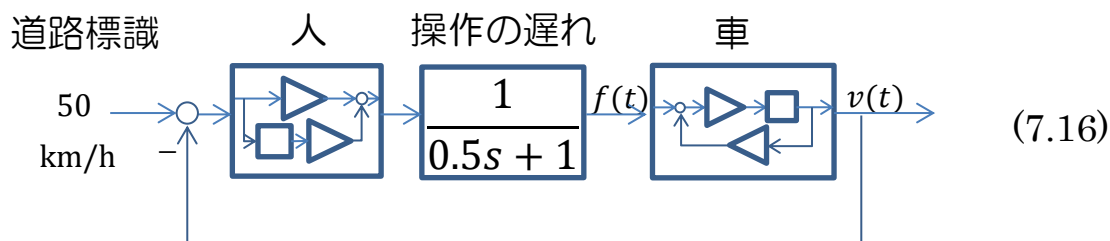
となるため、上式を数値計算で実行する場合は、計算ステップを $dt$ 、1つ前のステップを添え字 $n - 1$ で表した

$$x_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{dt} T + y_n \quad (7.15)$$

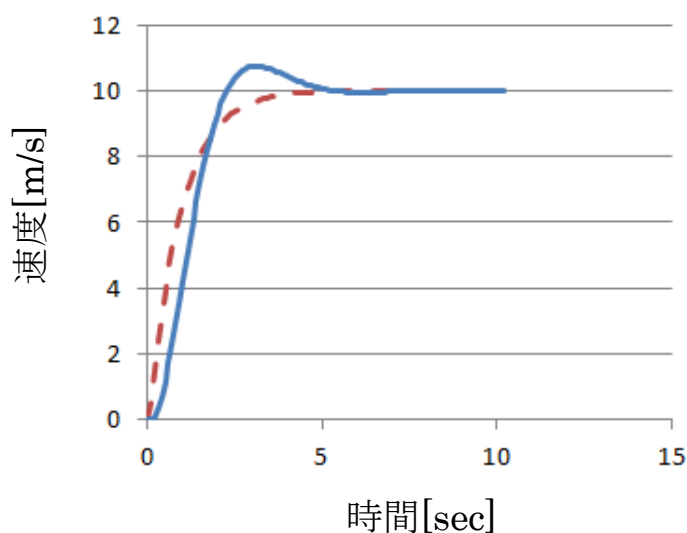
$$\therefore y_n = \frac{x_n dt + y_{n-1} T}{dt + T}$$

で計算できます。

それでは Excel の数値計算で確認してみましょう。人の操作の遅れを、 $T = 0.5$ 秒後に目標の 63%であると仮定し、模式図(7.10)の人と車の間に 1 次遅れ要素を挿入し



とします。上式をグラフの実線に示します。模式図(7.10)の破線に比べて、アクセルの踏み始めが遅れ、速度が目標に達してからアクセルを緩める動作も遅れていることがわかります。



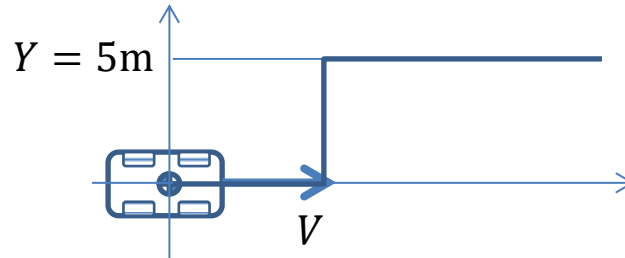
ここで、車の扱いやすさについて考えてみます。模式図(7.16)の「操作の遅れ」は人の特性のみを数値化したものですが、例えば、アクセルのストロークが大きすぎて足をたくさん動かす必要があったり、アクセル操作に対するエンジンの反応が遅い場合は、定性的に模式図(7.16)の時定数 $T$ が大きいと考えることができます。

従って、非常に当り前ではありますが、反応が速い車ほど、速度を目標値に合わせやすい、と言うことができます。



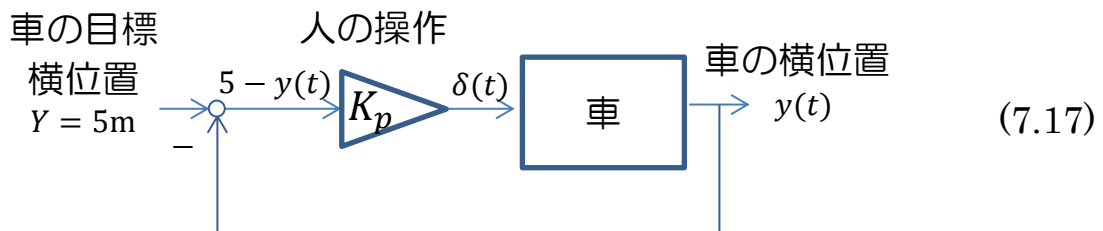
## 7.2. 曲がる

下図のように 5m 離れた隣の車線にレーンチェンジする状況で、人の操作と車の扱いやすさを考えます。



### 7.2.1. 位置のフィードバック

人の運転操作は、現在の車の位置  $y(t)$  と目標の位置  $Y = 5\text{m}$  との差に比例（比例定数  $K_p$ ）するようにステアリングを操作し、タイヤの舵角  $\delta(t)$  を生じさせると考えれば、次のような模式図となります。



上の模式図の結果を得るためには、時々刻々と変わるタイヤの舵角  $\delta(t)$  に対する、車の横方向の位置  $y(t)$  の計算が必要です。ここでは、車両運動の式で示した地上基準の車の運動方程式に  $\delta(t) = K_p(Y - y)$  を代入した

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2(k_1 + k_2)}{V} & \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} & \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2(k_1 + k_2) \\ 0 & -2(k_1 l_1 - k_2 l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 K_p (Y - y) \\ 2k_1 l_1 K_p (Y - y) \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

を使って模式図(7.17)の結果を Excel 計算で確認します。またここでは、レーンチェンジ中の車の向き  $\theta$  は小さいと考え、道路の向きに沿った速度  $V \cos \theta \approx V$  一定として解きます。

	A	B	C	D
1	$m$	1000	kg	車の質量
2	$I$	4000	$\text{Kgm}^2$	車の慣性モーメント
3	$l_1$	2	m	重心から前輪までの距離
4	$l_2$	2	M	重心から後輪までの距離
5	$k_1$	30000	N/rad	前輪のコーナリング <sup>6</sup> ステイフネス
6	$k_2$	70000	N/rad	後輪のコーナリング <sup>6</sup> ステイフネス
7	$V$	1000	kg	車の速度
8	$Y$	5	m	車の目標横位置
9	$K_p$	0.005	rad/m	人の操舵ゲイン

行列計算を行いやすくするために、式(7.18)に従って、質量マトリクス $M$ 、速度項マトリクス $C$ 、変位項マトリクス $K$ を次のように定義します。

質量マトリクス $M$

13	= B1	0
14	0	= B2

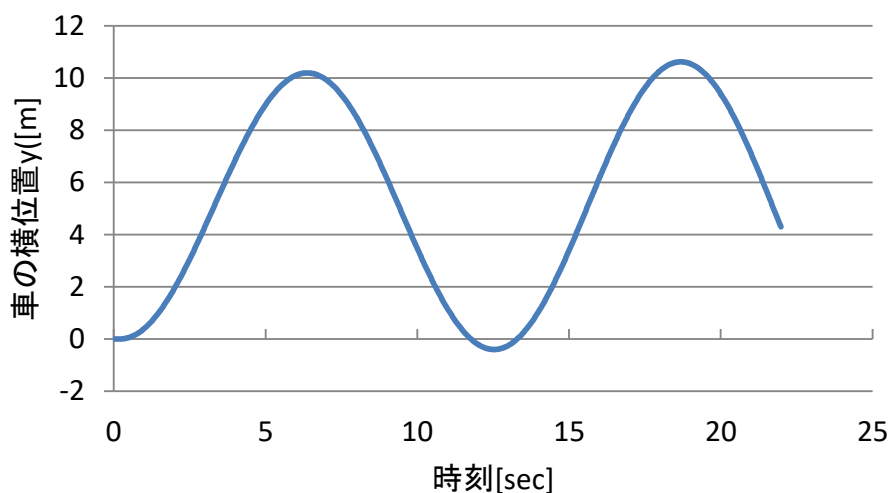
速度項マトリクス $C$

15	= $2/B7*(B5+B6)$	= $2/B7*(B3*B5-B4*B6)$
16	= A15	= $2/B7*(B3^2*B5+B4^2*B6)$

変位項マトリクス $K$

17	0	= $-2*(B5+B6)$
18	0	= $-2*(B3*B5-B4*B6)$

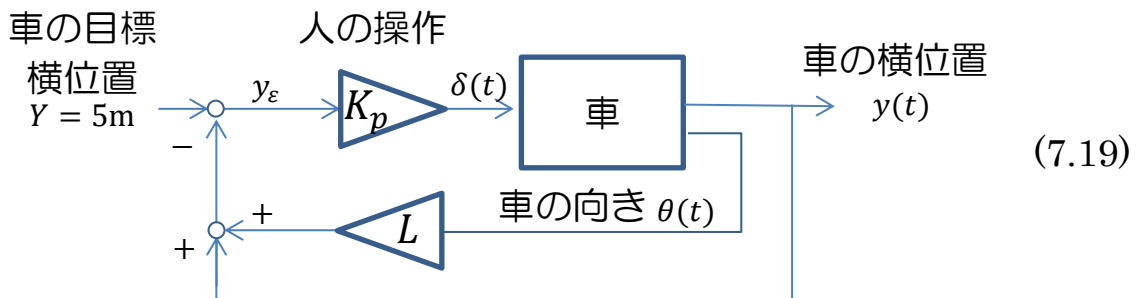
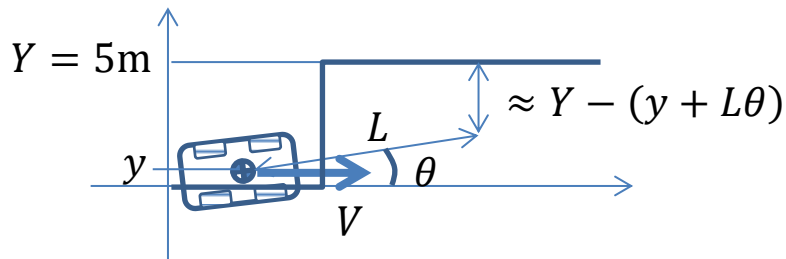
上記行列 $M$ 、 $C$ 、 $K$ を、式(7.9)のニューマークの $\beta$ 法を使って解くと、目標距離 5m を中心に振動する結果となります。



### 7.2.2.前方の位置をフィードバック

さて、前節の計算は何がまずかったのでしょうか。前節のように、車の現在位置と目標位置の差に応じてハンドルを切るため、人は真横を見て運転する必要があります。実際には前を見て運転しているのですから、これを考慮した計算を行ってみます。

ここでは下図のように、「車から前方 $L$ （以下、前方注視距離）の地点の横方向位置 $y + L\theta$ と、目標位置 $Y$ とのずれ量 $y_\varepsilon = Y - (y + L\theta)$ 」に応じてステアリングを操作すると考え、模式図(7.17)に車の向き $\theta$ に関する項を書き加えます。

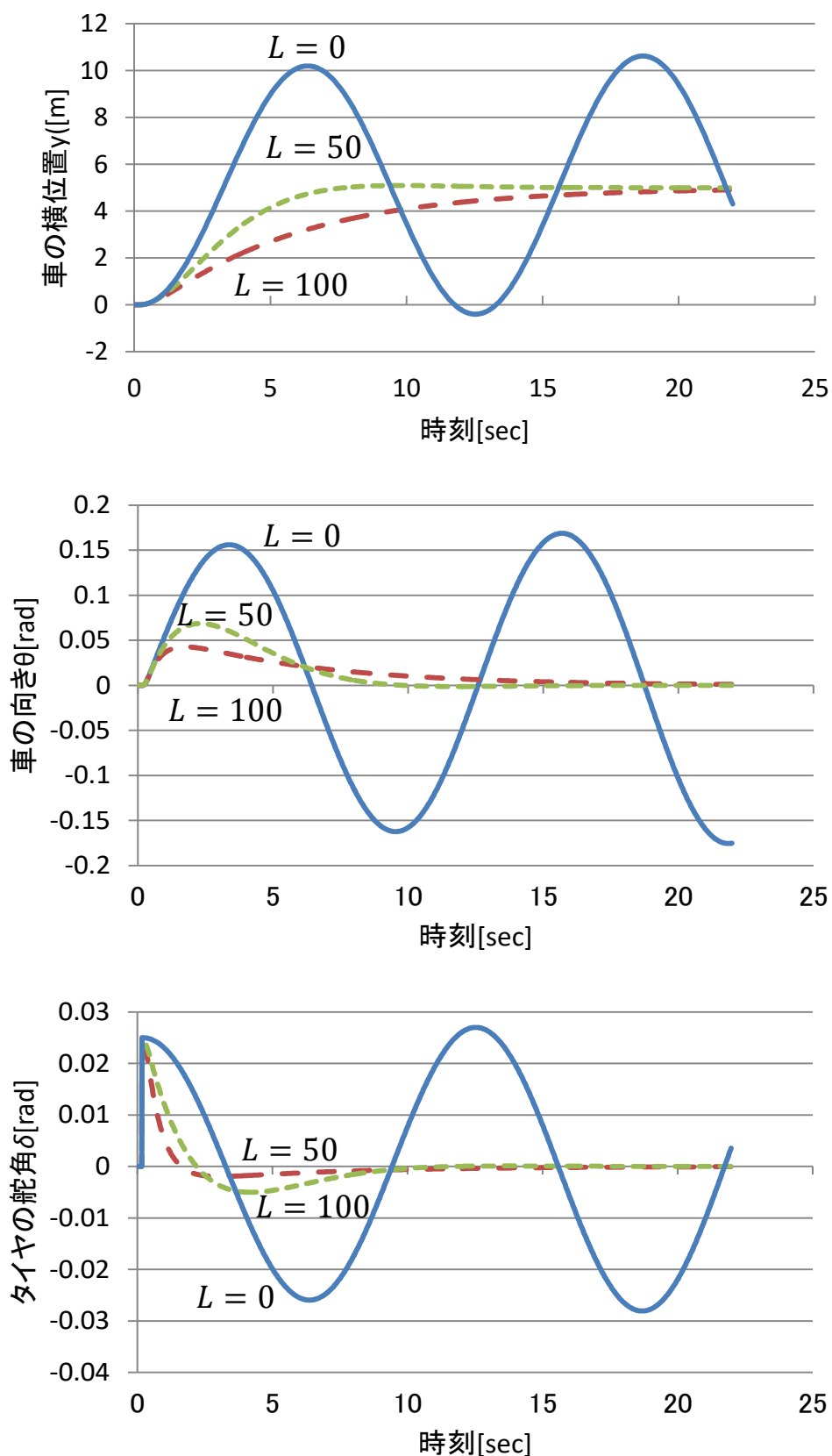


また、運動方程式は式(7.18)の右辺を書き換え

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2(k_1 + k_2)}{V} & \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} \\ \frac{2(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{V} & \frac{2(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -2(k_1 + k_2) \\ 0 & -2(k_1 l_1 - k_2 l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2k_1 K_p (Y - y - \theta L) \\ 2k_1 l_1 K_p (Y - y - \theta L) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

となります。

前方注視距離 $L = 0, 50, 100\text{m}$ の結果を、ニューマークの $\beta$ 法で解いた結果を示します。

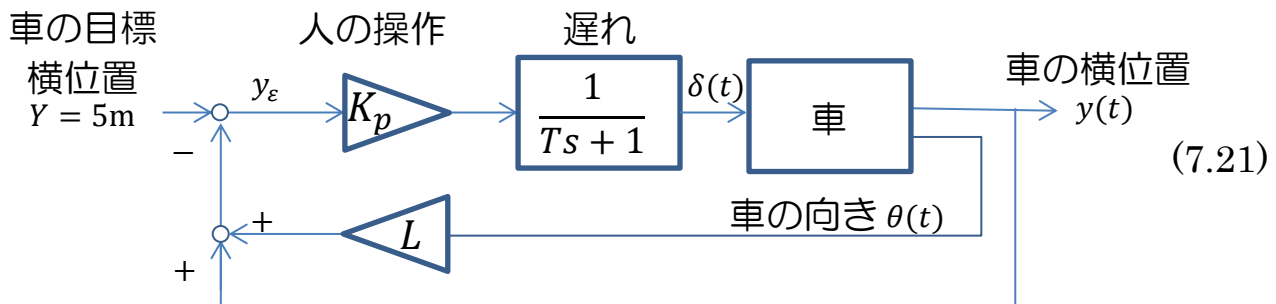


グラフより前節の結果 ( $L = 0$ ) は、車の挙動が振動的になりますが、遠くを見て運転するほど、人はステアリングの操作を直ちに収束させ、滑らかなレーンチェンジを行っていることがわかります。

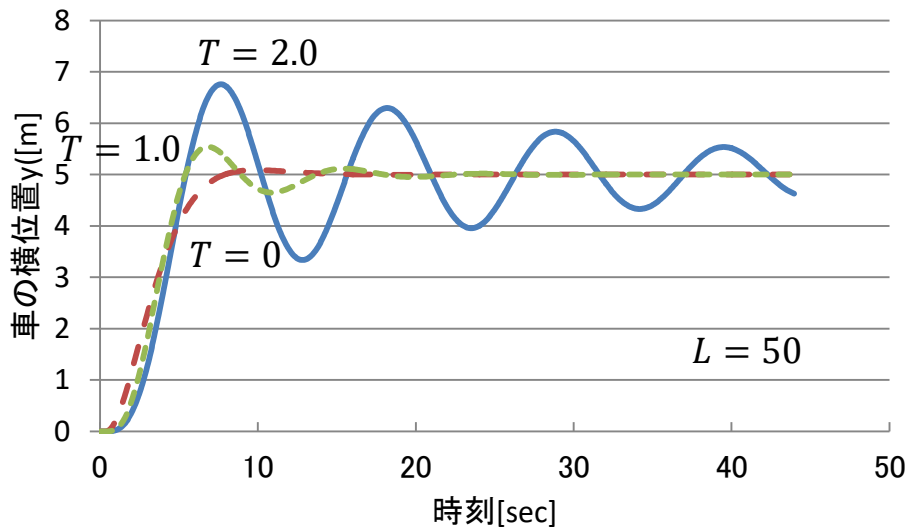
### 7.2.3.遅れに対する対応

実際には、人が目標コースとのずれを認識してから、ステアリングを切るまでにタイムラグが生じます。また、ステアリングを切ってからタイヤが回転するまでには、車の構造上、多少の遅れが生じると考えられます。

ここではこれらの遅れを、1次遅れ要素に代表させ、タイヤの舵角 $\delta$ の前に挿入し模式図(7.19)を

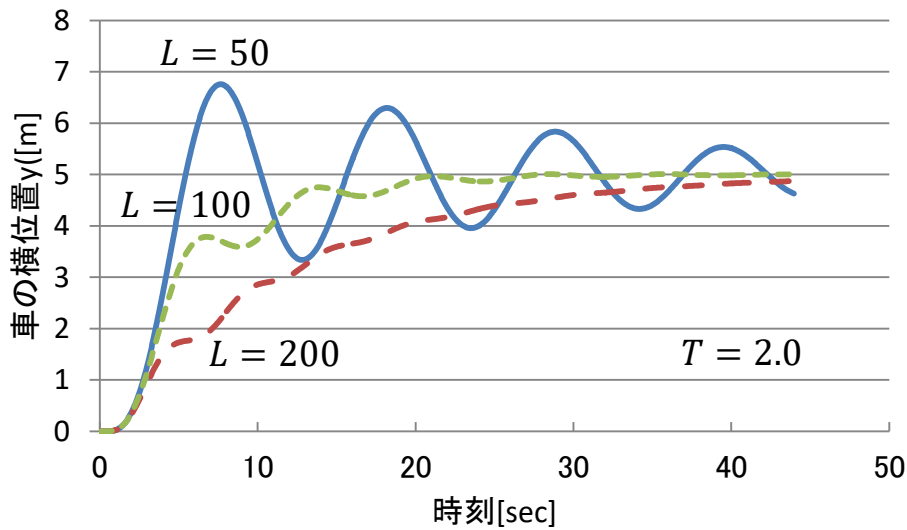


のように表します。前方注視距離 $L = 50\text{m}$ に固定し、時定数を $T = 0, 1.0, 2.0$ と増加させたときの、車の横方向の位置を示します。



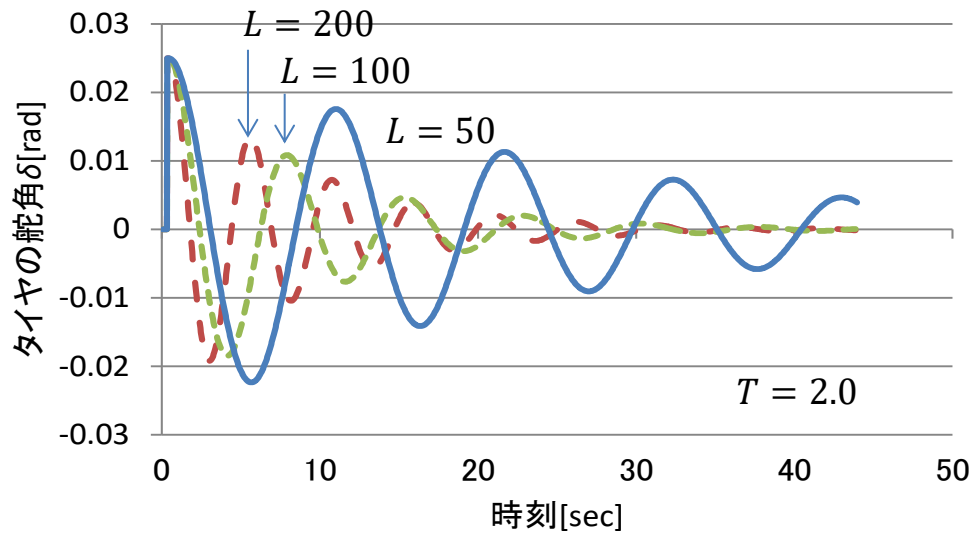
時定数 $T$ が大きいほど車の挙動が振動的になり、目標位置 $Y = 5\text{m}$ に落ち着くまでの時間が長くなります。これは例えば、古い給湯器でお湯と水の蛇口をひねって水温を調節する場合に、操作の結果が表れる時間が長いほど温度調節が難しいのと似た状況です。

ここで、時定数 $T = 2.0$ の振動的な挙動を抑制する方策の1つとして、前方注視距離を $L = 50$ 、 $100$ 、 $200$ と増加させた結果を示します。



グラフより、前方注視距離 $L$ が大きいほど、振動的な挙動を抑制できることがわかります。ただし、目標の位置 $Y = 5$  mに落ち着く時間は非常に長くなります。

参考にタイヤの舵角を示します。前方注視距離 $L$ が大きいほど、ステアリング操舵のタイミングが早まっていることがわかります。





## アペンディックス

---

三角関数

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

半角、倍角、3倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

和と差

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

積和

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

和積

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$



オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

対数

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

微分

$$\frac{d}{dt}(xy) = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

置換積分法  $x = g(z)$  と置き換える

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dz} dz = \int f(g(z)) \frac{d}{dz}(g(z)) dz$$

部分積分法

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

ラプラス変換の基本公式

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

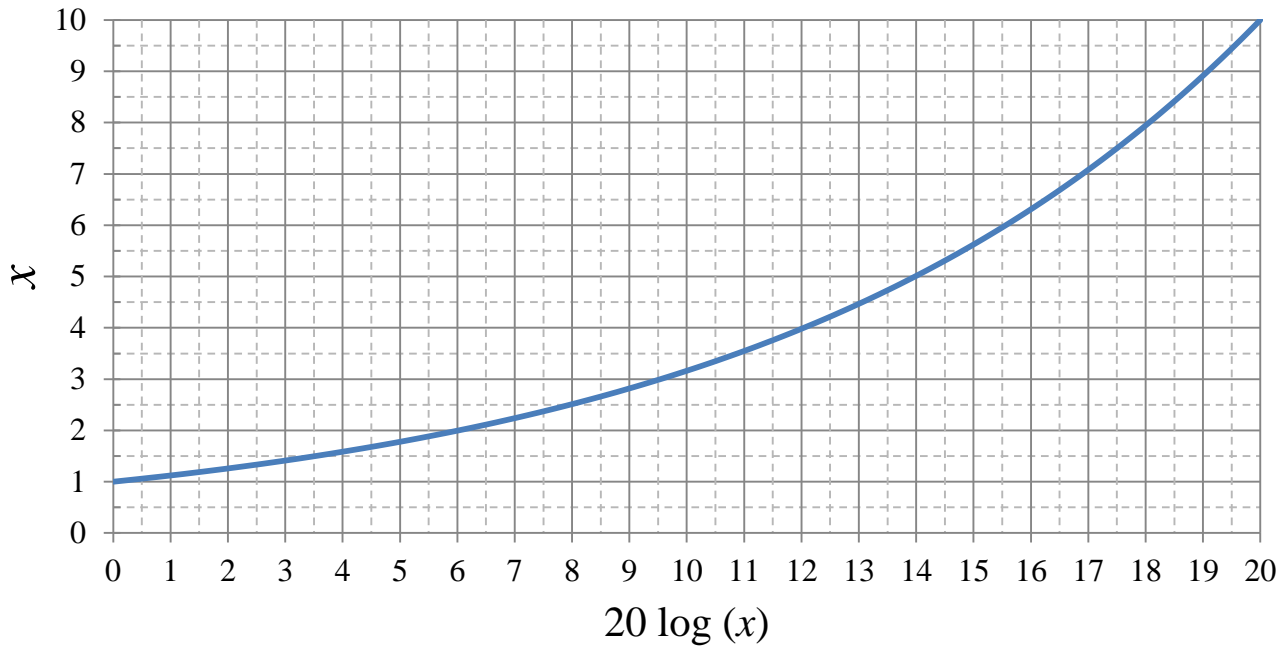
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \cdots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

## ラプラス変換表

原関数	像関数
1	$\frac{1}{s}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$
$t^n, (n: \text{自然数})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n, (n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^2e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
$e^{-at}(1-at)$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$t \cosh \omega t$	$\frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$t \sinh \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$

原関数	像関数
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} t \cos \omega t$	$\frac{(s+a)^2 - \omega^2}{\{(s+a)^2 + \omega^2\}^2}$
$e^{-at} t \sin \omega t$	$\frac{2\omega(s+a)}{\{(s+a)^2 + \omega^2\}^2}$
$\frac{\sin \omega}{t}$	$\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{s} \right)$
$\cos \omega(t+a)$	$\frac{s \cos \omega a - \omega \sin \omega a}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega(t-a)$	$\frac{s \cos \omega a + \omega \sin \omega a}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega(t-a) u(t-a)$	$\frac{e^{-as} s}{s^2 + \omega^2}$
$\begin{cases} 0(0 < t < a) \\ f(t)(a \leq t < b) \\ 0(b \leq t) \end{cases}$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\} - e^{-bs} \mathcal{L}\{f(t+b)\}$
$\begin{cases} f(t)(0 < t \leq a) \\ 0(a < t) \end{cases}$	$F(t) - e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$

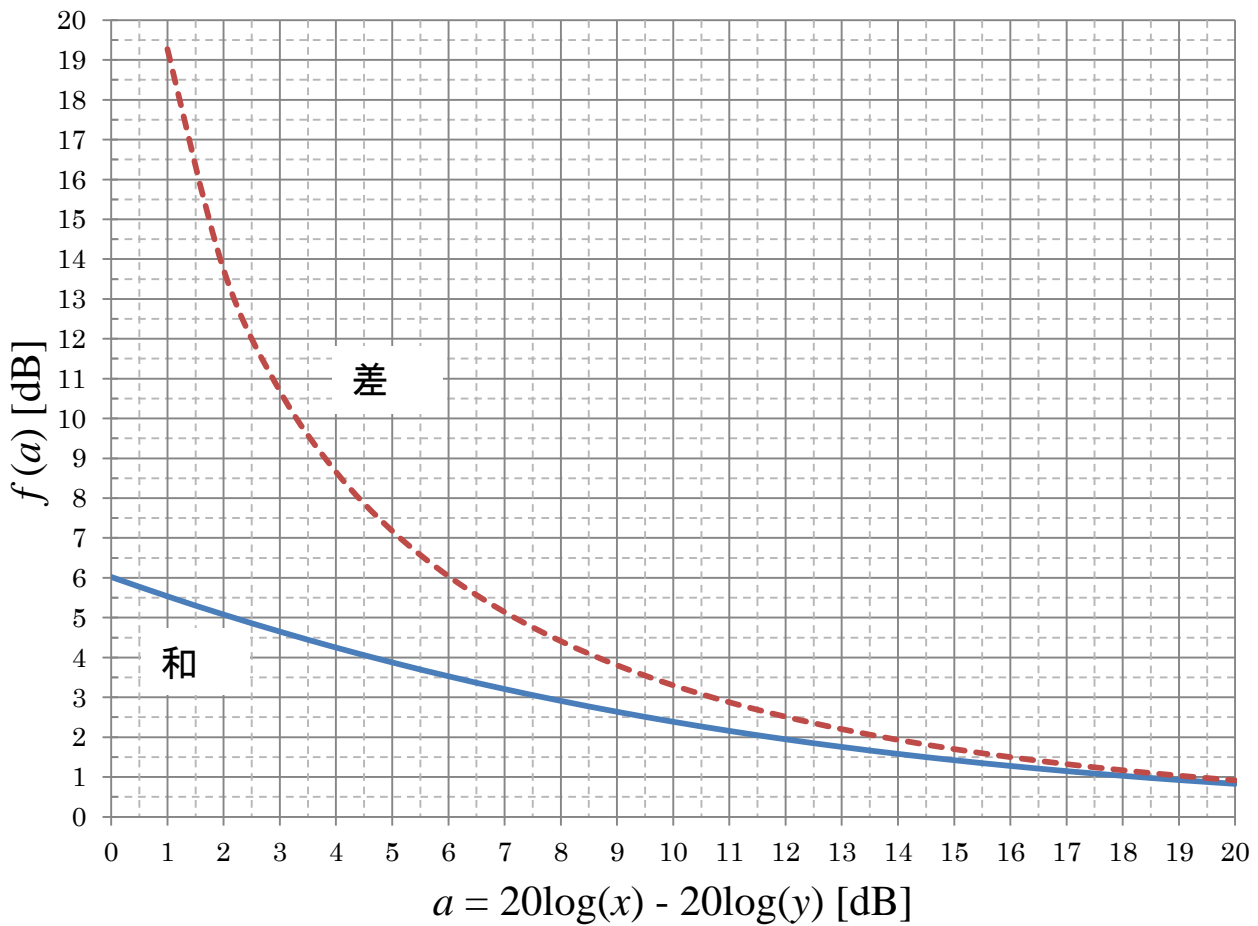
## 20log 変換表



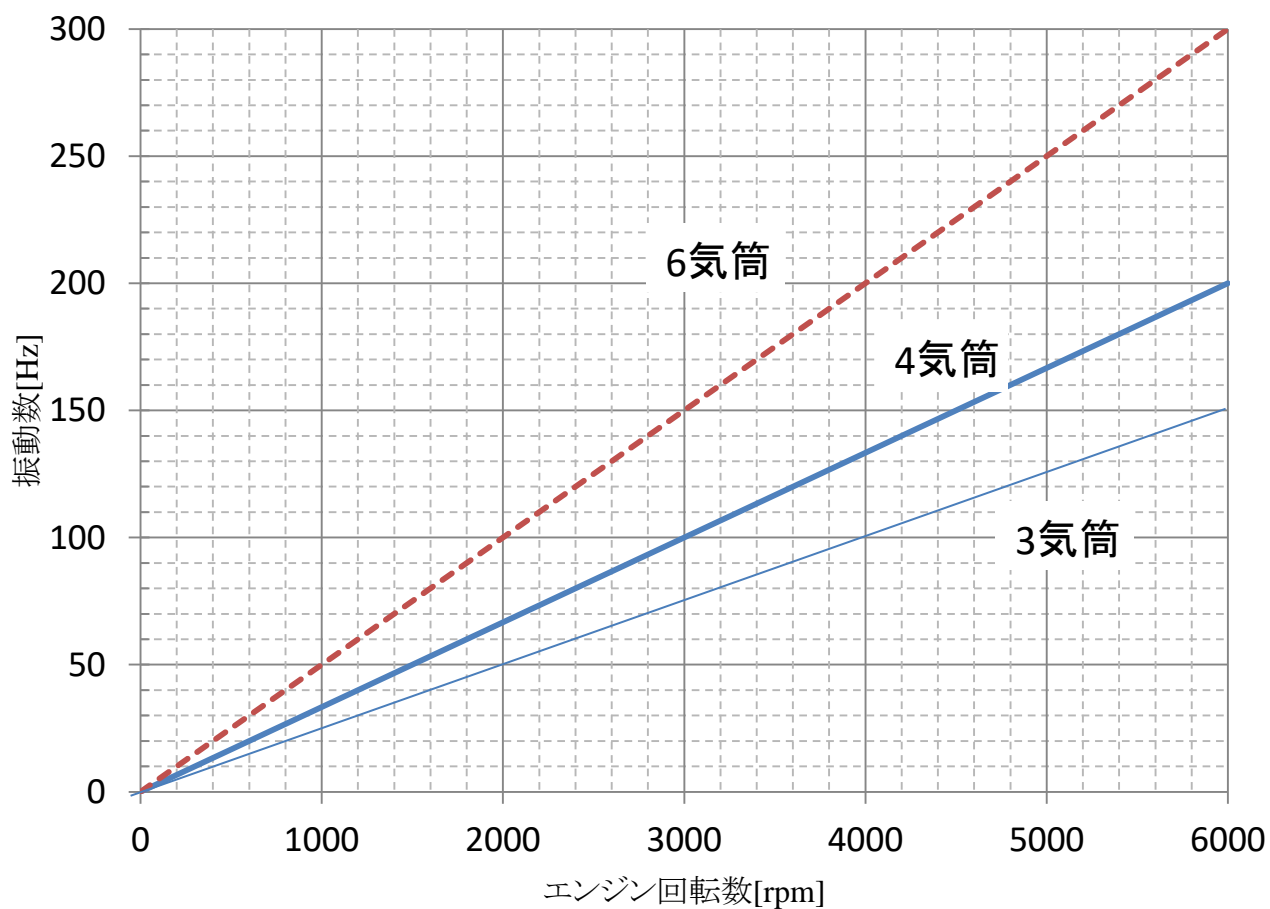
## dB の「足し算、引き算」の早見表

—  $20\log(x) + 20\log(y) \Rightarrow 20\log(x) + f(a)$

- - -  $20\log(x) - 20\log(y) \Rightarrow 20\log(x) - f(a)$

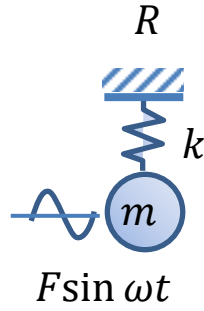
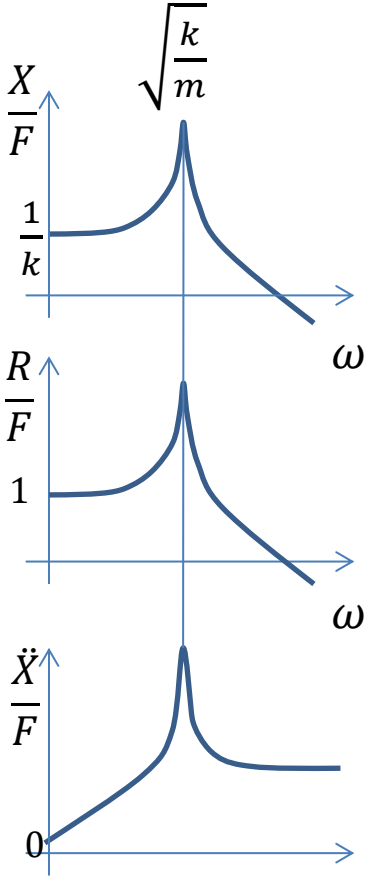


## エンジンの回転数と強制力の振動数



回転数 [rpm]	回転 1 次 [Hz]	2 気筒 爆発 1 次 [Hz]	3 気筒 爆発 1 次 [Hz]	4 気筒 爆発 1 次 [Hz]	6 気筒 爆発 1 次 [Hz]
600	10	10	15	20	30
1200	20	20	30	40	60
1800	30	30	45	60	90
2400	40	40	60	80	120
3000	50	50	75	100	150
3600	60	60	90	120	180
4200	70	70	105	140	210
4800	80	80	120	160	240
5400	90	90	135	180	270
6000	100	100	150	200	300

1 質点モデル



運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = F \sin \omega t$$

$$(-m\omega^2 + k)X = F$$

変位

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{-m\omega^2 + k}$$

伝達力

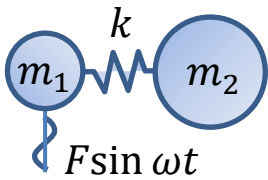
$$\frac{R}{F} = \frac{kX}{F} = \frac{k}{-m\omega^2 + k}$$

加速度

$$\frac{\ddot{X}}{F} = \frac{-\omega^2}{-m\omega^2 + k}$$

2 質点モデル その1

運動方程式



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

変位

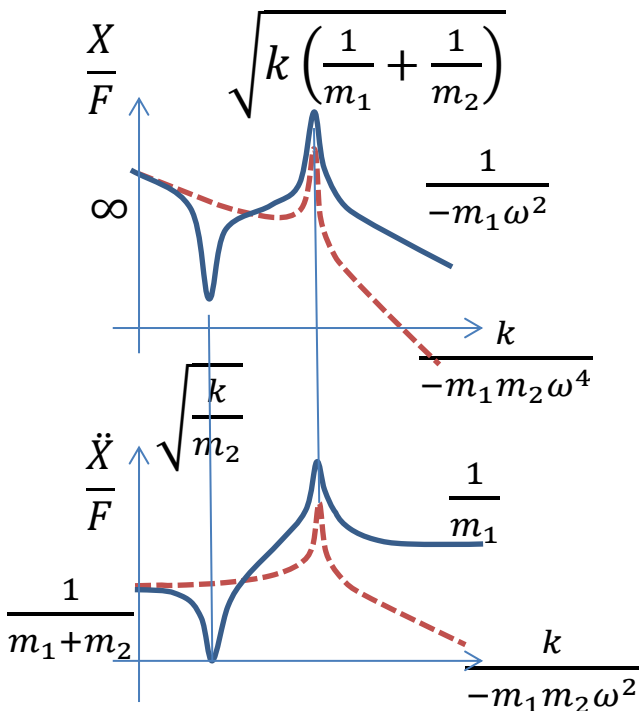
$$\frac{X_1}{F} = \frac{-m_2\omega^2 + k}{\omega^2 \{m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)\}}$$

$$\frac{X_2}{F} = \frac{k}{\omega^2 \{m_1 m_2 \omega^2 - k(m_1 + m_2)\}}$$

加速度

$$\frac{\ddot{X}_1}{F} = \frac{-m_2\omega^2 + k}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2}$$

$$\frac{\ddot{X}_2}{F} = \frac{k}{k(m_1 + m_2) - m_1 m_2 \omega^2}$$



## 2 質点モデル その2

運動方程式

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

です。振動振幅 $X_1$ 、 $X_2$ は逆行列を両辺に乗じて

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} -m_2\omega^2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}}{(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k^2} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{(-m_2\omega^2 + k_2)F_1 + k_2 F_2}{m_1 m_2 \omega^4 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1 k_2} \\ \frac{k_2 F_1 + (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)F_2}{m_1 m_2 \omega^4 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1 k_2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

です。伝達力 $R$ は

$$R = k_1 X_1 = \frac{k_1(-m_2\omega^2 + k_2)F_1 + k_1 k_2 F_2}{m_1 m_2 \omega^4 - \{k_1 m_2 + k_2(m_1 + m_2)\}\omega^2 + k_1 k_2} \quad (1.3)$$

となります。

共振周波数 $\omega$ の求め方

## 1) 図式解法

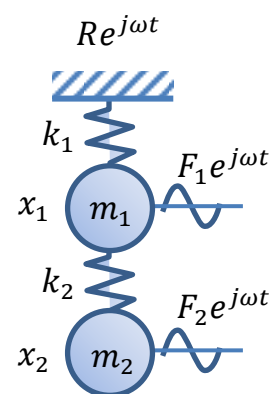
振動振幅が $\infty$ となる分母=0の条件を変形し、次式の左辺と右辺が等しくなる $\omega$ となります。

$$\begin{aligned} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k^2 &= 0 \\ -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 &= \frac{k^2}{-m_2\omega^2 + k_2} \\ -m_1\omega^2 + k_1 &= \frac{k^2}{-m_2\omega^2 + k_2} - k_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

## 2) 解析解

振動振幅が $\infty$ となる分母=0の条件から、共振周波数 $\omega$ について解けば

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \omega^4 - \{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2\}\omega^2 + k_1 k_2 &= 0 \\ \omega^2 &= \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2 \pm \sqrt{\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2)m_2\}^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2} \end{aligned} \quad (1.5)$$



目標共振周波数とする設計パラメータの求め方

式(1.5)を簡単にするために $\omega^2 \equiv p$ と置き換え

$$p_1 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 + \sqrt{\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\}^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2} \quad (1.6)$$

$$p_2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2 - \sqrt{\{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\}^2 - 4 m_1 m_2 k_1 k_2}}{2 m_1 m_2}$$

と表します。上式を $m_1$ 、 $m_2$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $p_1$ 、 $p_2$ に関する2つの関係式と捉えなおし、任意の2つの変数について解きます。

式(1.6)を $k_1$ 、 $k_2$ について解けば

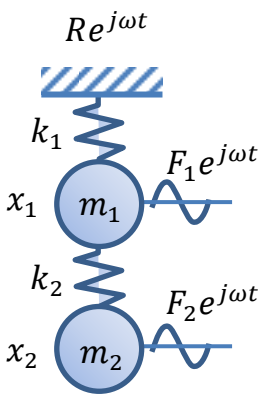
$$k_1 = \frac{m_1(p_1 + p_2) \mp \sqrt{m_1} \sqrt{m_1(p_1 - p_2)^2 - 4 m_2 p_1 p_2}}{2} \quad (1.7)$$

$$k_2 = \frac{m_1 m_2(p_1 + p_2) \pm \sqrt{m_1} m_2 \sqrt{m_1(p_1 - p_2)^2 - 4 m_2 p_1 p_2}}{2(m_1 + m_2)}$$

式(1.6)を $k_1$ 、 $p_1$ について解けば

$$k_1 = \frac{p_2 \{-k_2(m_1 + m_2) + m_1 m_2 p_2\}}{-k_2 + m_2 p_2} \quad (1.8)$$

$$p_1 = k_2 \left( \frac{1}{m_2} + \frac{k_2}{k_2 m_1 - m_1 m_2 p_2} \right)$$



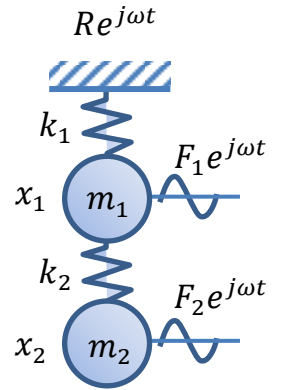
式(1.6)を $k_1$ 、 $p_2$ について解けば

$$k_1 = \frac{p_1 \{-k_2(m_1 + m_2) + m_1 m_2 p_1\}}{-k_2 + m_2 p_1} \quad (1.9)$$

$$p_2 = k_2 \left( \frac{1}{m_2} + \frac{k_2}{k_2 m_1 - m_1 m_2 p_1} \right)$$

式(1.6)を $k_2$ 、 $p_1$ について解けば

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{m_2 p_2 (-k_1 + m_1 p_2)}{-k_1 + (m_1 + m_2) p_2} \\ p_1 &= \frac{k_1 (-k_1 + m_1 p_2)}{-k_1 m_1 + m_1 (m_1 + m_2) p_2} \end{aligned} \quad (1.10)$$



式(1.6)を $k_2$ 、 $p_2$ について解けば

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{m_2 p_1 (-k_1 + m_1 p_1)}{-k_1 + (m_1 + m_2) p_1} \\ p_2 &= \frac{k_1 (-k_1 + m_1 p_1)}{-k_1 m_1 + m_1 (m_1 + m_2) p_1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

式(1.6)を $m_1$ 、 $m_2$ について解けば

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2\sqrt{k_1}(k_1 + k_2)}{\sqrt{k_1}(p_1 + p_2) \pm \sqrt{k_1(p_1 - p_2)^2 - 4k_2 p_1 p_2}} \\ m_2 &= \frac{k_1 k_2 (p_1 + p_2) \pm \sqrt{k_1 k_2} \sqrt{k_1(p_1 - p_2)^2 - 4k_2 p_1 p_2}}{2(k_1 + k_2) p_1 p_2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

式(1.6)を $m_1$ 、 $k_1$ について解けば

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{k_2^2 m_2}{(k_2 - m_2 p_1)(k_2 - m_2 p_2)} \\ k_1 &= -\frac{k_2 m_2^2 p_1 p_2}{(k_2 - m_2 p_1)(k_2 - m_2 p_2)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

式(1.6)を $m_2$ 、 $k_2$ について解けば

$$\begin{aligned} m_2 &= -\frac{(k_1 - m_1 p_1)(k_1 - m_1 p_2)}{m_1 p_1 p_2} \\ k_2 &= -\frac{(k_1 - m_1 p_1)(k_1 - m_1 p_2)}{k_1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

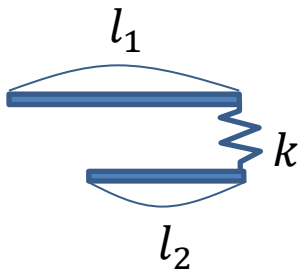


運動方程式の構成要素 剛性マトリクス

ばね



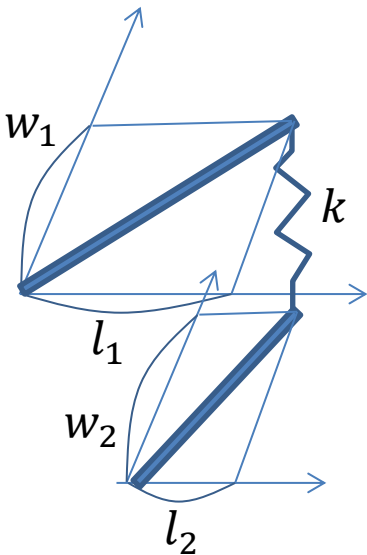
$$\begin{bmatrix} k & \cdots & -k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -k & \cdots & k \end{bmatrix} \quad \text{接地の場合} \quad \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & k & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$



剛体の先についたばね (1次元)

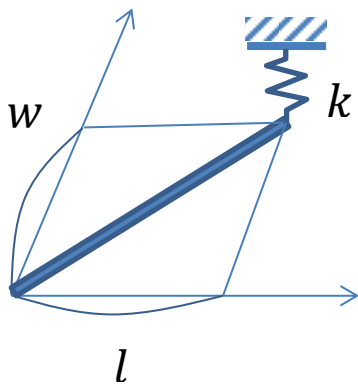
$$\begin{bmatrix} k & -kl_1 & -k & kl_2 \\ -kl_1 & kl_1^2 & kl_1 & -kl_1l_2 \\ -k & kl_1 & k & -kl_2 \\ kl_2 & -kl_1l_2 & -kl_2 & kl_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{接地の場合} \quad \begin{bmatrix} k & -kl \\ -kl & kl^2 \end{bmatrix}$$

ここで  $l_1$ 、 $l_2$  は相対距離のため、正負いずれの値もとる。



剛体の先についたばね (2次元)

$$\begin{bmatrix} k & kw_1 & -kl_1 & -k & -kw_2 & kl_2 \\ kw_1 & kw_1^2 & -kl_1w_1 & -kw_1 & -kw_1w_2 & kl_2w_1 \\ -kl_1 & -kl_1w_1 & kl_1^2 & kl_1 & kl_1w_2 & -kl_1l_2 \\ -k & -kw_1 & kl_1 & k & kw_2 & -kl_2 \\ -kw_2 & -kw_1w_2 & kl_1w_2 & kw_2 & kw_2^2 & -kl_2w_2 \\ kl_2 & kl_2w_1 & -kl_1l_2 & -kl_2 & -kl_2w_2 & kl_2^2 \end{bmatrix}$$

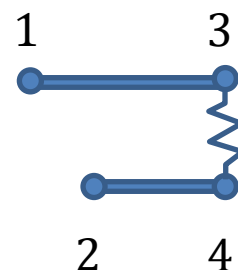


接地の場合  $\begin{bmatrix} k & kw & -kl \\ kw & kw^2 & -klw \\ -kl & -klw & kl^2 \end{bmatrix}$

## 剛体の先についたばねの剛性マトリクス

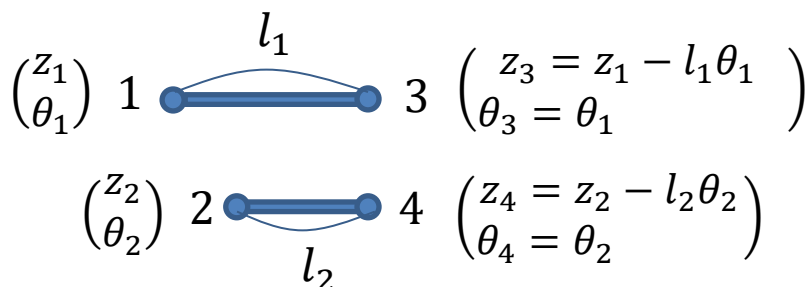
点 1 と点 2 を剛体とばねを介して結合する場合の剛性マトリクスの求め方を整理します。全ての点の変位  $x$  に対する反力  $R$  は行列  $K$  を

	1	1'	2	2'	3	3'	4	4'
1								
1'								
2								
2'								
3					$k$		$-k$	
3'								
4					$-k$		$k$	
4'								



とにおいて  $R = Kx$  と表されます。ここで 1' は点 1 の回転自由度を表します。一方、点 3、4 の変位は下図のように点 1、2 の変位  $x_0$  に従属するため、行列  $A$  を

	1	1'	2	2'
1	1			
1'		1		
2	1			
2'		1		
3	1	$-l_1$		
3'		1		
4			1	$-l_2$
4'				1



$$x_0 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

とにおいて  $x = Ax_0$  と表せます。また、点 1、2 に働く反力  $R_0$  を、点 3、4 に働く反力とモーメントアーム  $l_1$ 、 $l_2$  で置き換えると、 $R_0 = A^T R$  と表すことができます。

$$R_0 = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

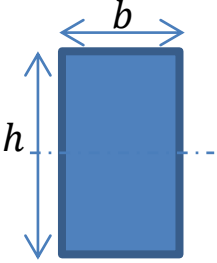
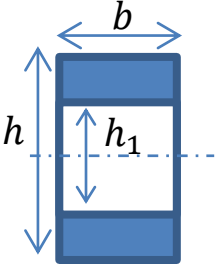
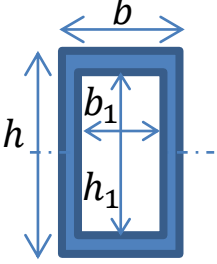
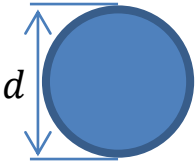
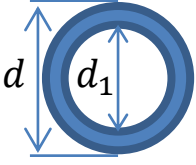
以上より

$$R_0 = A^T R = A^T Kx = A^T KAx_0$$

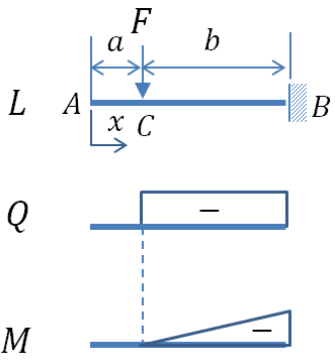
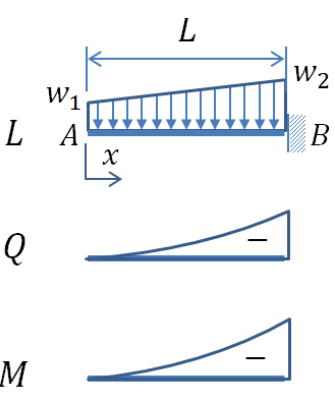
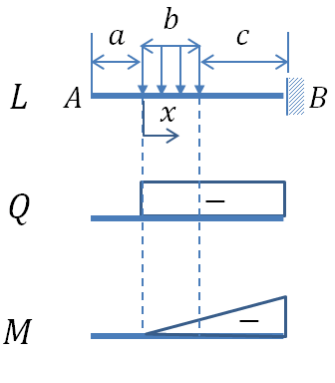
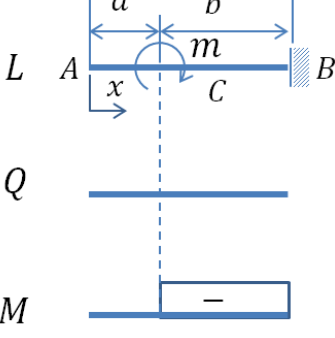
従って、点 1、2 の間の剛性マトリクスは

$$A^T KA = \begin{bmatrix} k & -kl_1 & -k & kl_2 \\ -kl_1 & kl_1^2 & kl_1 & -kl_1 l_2 \\ -k & kl_1 & k & -kl_2 \\ kl_2 & -kl_1 l_2 & -kl_2 & kl_2^2 \end{bmatrix}$$

となります。

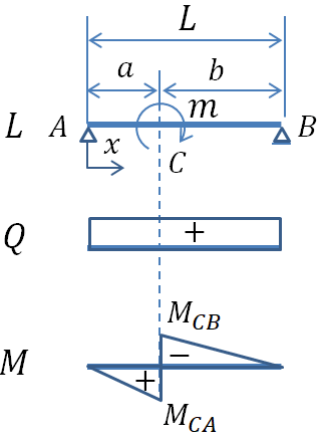
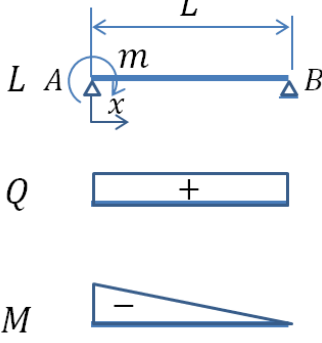
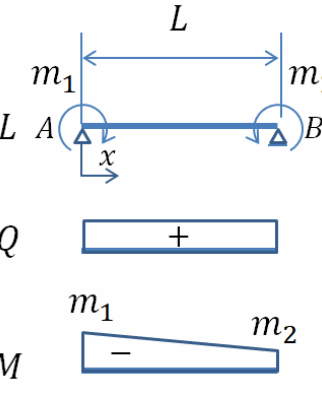
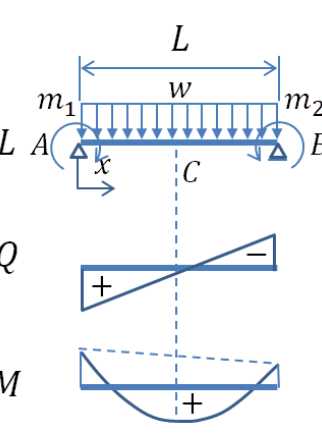
	面積	断面二次モーメント	断面係数	塑性断面係数
	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh^2}{4}$
	$bh - b_1h_1$	$\frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6} - \frac{b_1h_1^2}{6}$	$\frac{bh^2}{4} - \frac{b_1h_1^2}{4}$
	$bh - b_1h_1$	$\frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6} - \frac{b_1h_1^2}{6}$	$\frac{bh^2}{4} - \frac{b_1h_1^2}{4}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{d^3}{6}$
	$\frac{\pi d^2 - \pi d_1^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_1^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32} - \frac{\pi d_1^3}{32}$	$\frac{d^3}{6} - \frac{d_1^3}{6}$

## 片持ち梁

	$R_B = F$ $M_x = -F(x - a)$ $M_B = -Fb$ $\theta_A = -\frac{Fb^2}{2EI}$ $\delta_x = \frac{Fb^3}{3EI} \left\{ 1 - \frac{3(x - a)}{2b} - \frac{(x - a)^3}{2b^3} \right\}$ $\delta_A = \frac{Fb^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3a}{2b} \right)$
	$R_B = \frac{w_1 + w_2}{2} L$ $M_x = -\frac{w_1}{2} x^2 - \frac{w_2 - w_1}{6L} x^3$ $M_B = -\frac{2w_1 + w_2}{6} L^2$ $\theta_A = -\frac{3w_1 + w_2}{24EI} L^3$ $\delta_A = \frac{11w_1 + 4w_2}{120EI} L^4$
	$R_B = wb$ $x \leq b: M_x = -\frac{w}{2} x^2, x > b: M_x = -wb \left( x - \frac{b}{2} \right)$ $M_B = -wb \left( \frac{b}{2} + c \right)$ $\theta_A = -\frac{wb}{6EI} \{ b^2 + 3c(b + c) \}$ $\delta_A = \frac{wb}{24EI} \{ 3b^3 + 12b^2c + 18bc^2 + 8c^3 + 4a(b^2 + 3bc + 3c^2) \}$
	$R_B = 0$ $M_x = -m$ $\theta_A = -\frac{mb}{EI}$ $\delta_A = \frac{m}{2EI} (b^2 + 2ab)$

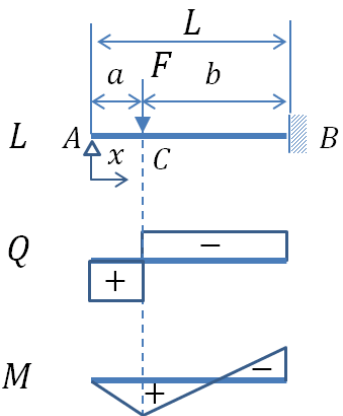
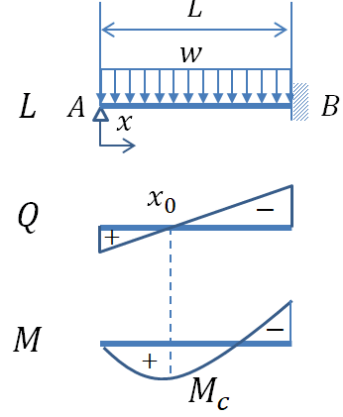
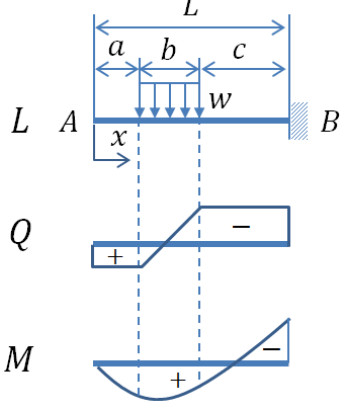
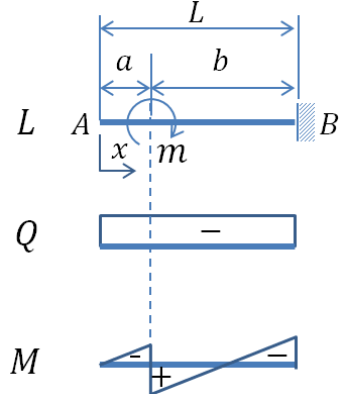
## 単純支持梁

	$R_A = Fb/L, R_B = Fa/L$ $x \leq a: M_x = Fbx/L, x > a: M_x = Fa(L-x)/L$ $\theta_A = \frac{Fb}{6EIL}(L^2 - b^2), \theta_B = \frac{Fa}{6EIL}(a^2 - L^2)$ $\delta_c = \frac{Fa^2b^2}{3EIL}$ $x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}: \delta_{max} = \frac{Fb}{3EIL} \left( \frac{a^2 + 2ab}{3} \right)^{3/2}$
	$R_A = F$ $x \leq a: M_x = -Fx, M_{max} = M_c = M_D = Fa$ $\theta_A = -\theta_B = \frac{Fa}{2EI}(L-a)$ $\delta_c = \frac{Fa^2}{6EI}(3L-4a)$ $x = \frac{2a+b}{2}: \delta_{max} = \frac{Fa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)$
	$R_A = \frac{L(2w_1 + w_2)}{6}, R_B = \frac{L(w_1 + 2w_2)}{6}$ $M_x = R_A x - \frac{w_1}{2}x^2 - \frac{w_2 - w_1}{6L}x^3$ $\theta_A = \frac{L^3}{EI} \left\{ \frac{w_1}{24} + \frac{7(w_2 - w_1)}{360} \right\}, \theta_B = -\frac{L^3}{EI} \left\{ \frac{w_1}{24} + \frac{w_2 - w_1}{45} \right\}$ $\delta_x = \frac{w_1 x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) + \frac{w_2 - w_1}{360EI} \cdot \frac{x}{L}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$
	$R_A = \frac{wb(2c+b)}{2L}, R_B = \frac{wb(2a+b)}{2L}$ $a < x < a+b: M_x = \frac{wb(2c+b)}{2L}x - \frac{x(x-a)^2}{2}$ $\theta_A = \frac{wb}{48EIL}(2c+b)\{(2a+b)(2L+2c+b) - b^2\}$ $\delta_x = \frac{wb}{48EIL} \left\{ x(2c+b)\{(2a+b)(2L+2c+b) - b^2\} - 4x^2 \right\} + \frac{2L}{b}(x-a)^4 \}$

	$R_A = m/L$ $x \leq a: M_x = \frac{m}{L}x, x > a: M_x = m\left(1 - \frac{x}{L}\right)$ $M_{CA} = am/L, M_{CB} = -bm/L$ $\theta_A = \frac{m}{6EIL}(L^2 - 3b^2), \theta_B = \frac{m}{6EIL}(L^2 - 3a^2)$ $x \leq a: \delta_x = \frac{m}{6EI} \left\{ \left(6a - \frac{3a^2}{L} - 2l\right)x - \frac{x^3}{L} \right\}$ $x > a: \delta_x = \frac{m}{6EI} \left\{ 3(a^2 + x^2) - \frac{x^3}{L} - \left(2l + \frac{3a^2}{L}\right)x \right\}$
	$R_A = m/L$ $M_x = m(1 - x/L)$ $\theta_A = -\frac{mL}{3EI}, \theta_B = \frac{mL}{6EI}$ $\delta_x = \frac{mx}{6EIL}(L - x)(2L - x)$ $x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)L: \delta_{max} = \frac{mL^2}{9\sqrt{3}EI}$
	$R_A = (m_1 - m_2)/L$ $M_x = m_1 - \frac{m_1 - m_2}{L}x$ $\theta_A = -\frac{2m_1 + m_2}{6EI}L, \theta_B = \frac{m_1 + 2m_2}{6EI}L$ $\delta_x = \frac{x(x - L)}{2EI} \left\{ m_1 - \frac{m_2 - m_1}{3L}(x + L) \right\}$ $x = L/2: \delta_{max} = \frac{m_1 + m_2}{16EI}L^2$
	$R_A = \frac{wL}{2} + \frac{m_1 - m_2}{L}, R_B = \frac{wL}{2} - \frac{m_1 - m_2}{L}$ $M_x = R_Ax - m_1 - \frac{wx^2}{2}$ $M_C = \frac{wL^2}{8} - \frac{m_1 + m_2}{2}$ $\theta_A = \frac{wL^3}{24EI} - \frac{2m_1 + m_2}{6EI}L$ $\delta_c = \frac{5wL^4}{384EI} - \frac{m_1 + m_2}{16EI}L^2$

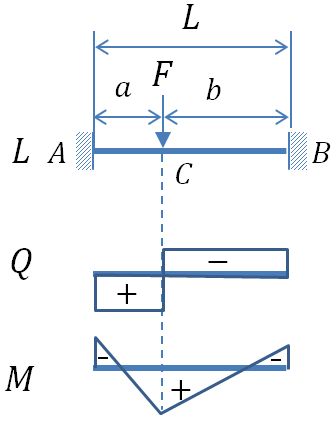
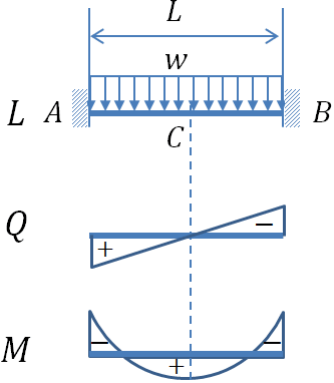
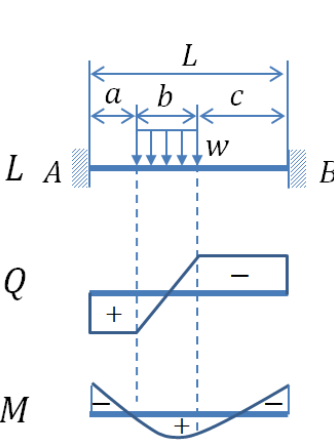
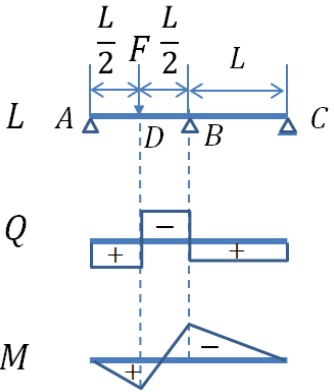
	$R_A = -Fa/L, R_B = (a + L)F/L$ $M_{x_1} = -\frac{Fax}{L}, M_{x_2} = -Fx_2$ $\theta_A = \frac{aL}{6EI}F, \theta_B = \frac{aL}{3EI}F, \theta_C = \frac{a^2}{2EI}F + \theta_B$ $\delta_C = \frac{Fa^2}{3EI}(L + a)$ $x = \frac{L}{\sqrt{3}}: \delta_{max} = -0.0642 \frac{FaL^2}{EI}$
	$R_A = w(L^2 - a^2)/2L, R_B = w(L + a)^2/2L$ $M_B = -wa^2/2$ $x_0 = \frac{L^2 - a^2}{2}: M_{max} = R_A x_0 - \frac{wx_0^2}{2}$ $\theta_C = \frac{wa^3}{3EI} + \frac{wL}{24EI}(L^2 - 4a^2),$ $\delta_C = \frac{wa^4}{8EI} + \frac{wLa}{24EI}(4a^2 - L^2)$ $x = \frac{L}{2}: \delta_{max} = \frac{5wL^4}{384EI} - \frac{M_B L^2}{16EI}$
	$R_A = \frac{F_1 b - F_2 a}{L}, R_B = \frac{F_1 c + F_2(L + a)}{L}$ $M_B = -F_2 a, M_D = (F_1 b - F_2 a)c/L$ $\theta_C = \frac{bc(L + c)}{6EIL}F_1 - \frac{a}{6EI}(3a + 2L)F_2$ $\delta_C = \frac{a^2(L + a)}{3EI}F_2 - \frac{abc(2c + b)}{6EIL}F_1$ $\delta_D = \frac{b^2 c^2}{3EIL}F_1 - \frac{abc(2L - b)}{6EIL}F_2$
	$R_A = \frac{F_1(L + a) - F_2 b}{L}, R_B = \frac{F_2(L + b) + F_1 a}{L}$ $M_A = -F_1 a, M_B = -F_2 b$ $\theta_A = \frac{2M_A + M_B}{6EI}L, \theta_B = -\frac{M_A + 2M_B}{6EI}L$ $\delta_C = \frac{F_1 a^3}{3EI} - \theta_A a, \delta_D = \frac{F_2 b^3}{3EI} - \theta_B b$ $x = \frac{L}{2}: \delta_0 = \frac{M_A + M_B}{16EI}L^2$

## 片側固定、方側ピン

	$R_A = \frac{Fb^2}{2L^3}(3a + 2b), R_B = F - R_A$ $M_B = -\frac{Fab(2a + b)}{2L^2}$ $\theta_A = \frac{Fab^2}{4EI}L, \delta_c = \frac{Fa^2b^3(4a + 3b)}{12EIL^3}$ $x \leq a: \delta_x = \frac{Fb^2}{12EIL^3}\{3aL^2 - (2L + a)x^2\}x$ $x > a: \delta_x = \frac{Fa}{12EIL^3}\{(3L^2 - a^2)x - 2a^2L\}(L - x)^2$
	$R_A = 3wL/8, R_B = 2wL/5$ $M_x = \frac{wLx}{8}\left(3 - \frac{4x}{L}\right), M_B = -\frac{wL^2}{8}$ $x_0 = \frac{3}{8}L: M_c = \frac{9}{128}wL^2$ $\theta_A = \frac{wL^3}{48EI}, \delta_x = \frac{wL^3x}{48EI}\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)$ $x = 0.422L: \delta_{max} = \frac{wL^4}{185EI}$
	$R_A = \frac{wb}{8L^3}\{4L\{3c(b + c) + b^2\} - 2c^2(3b + 2c) - b^2(b + 4c)\}, R_B = wb - R_A$ $M_B = R_AL - wb\left(\frac{b}{2} + c\right), \theta_A = \frac{R_AL^2}{2EI} - \frac{wb}{6EI}\{3c(c + b) + b^2\}$ $a < x < a + b:$ $\delta_x = \frac{wb}{6EI}\left\{3c(c + b) + b^2\right\}x - \frac{(x - a)^4}{4b} - \frac{R_A}{6EI}(x^2 - 3L^2)x$
	$R_A = -R_B = -\frac{3m}{2L}\left(\frac{L^2 - a^2}{L^2}\right)$ $x \leq a: M_x = R_Ax, x > a: M_x = R_Ax + m$ $M_B = \frac{m}{2}\left(1 - \frac{3a^2}{L^2}\right)$ $\theta_A = -\frac{m}{EI}\left(\frac{L}{4} - a + \frac{3a^2}{4L}\right)$ $\delta_x = \frac{m}{EI}\left\{\frac{L^2 - a^2}{4L^3}(3L^2x - x^3) - (L - a)x\right\}$

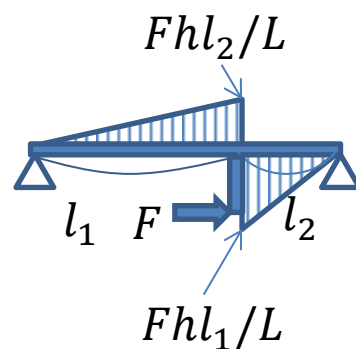
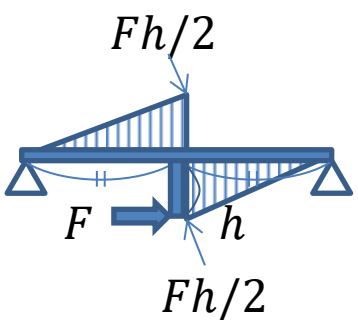
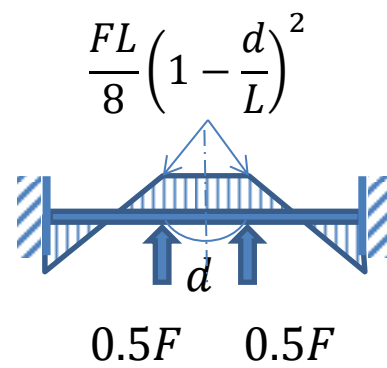
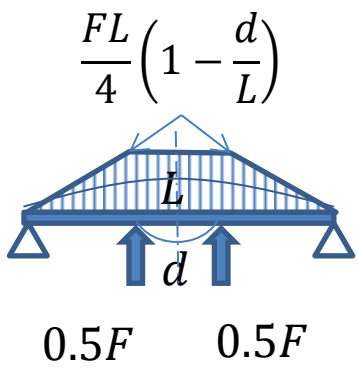
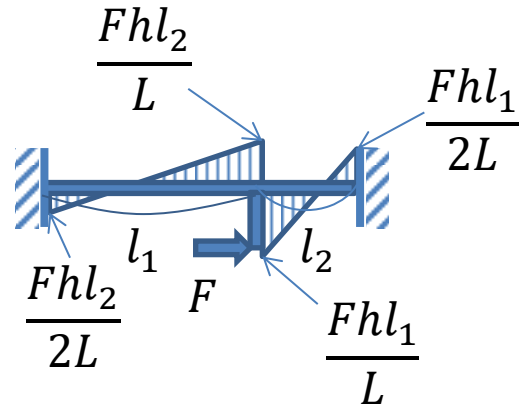
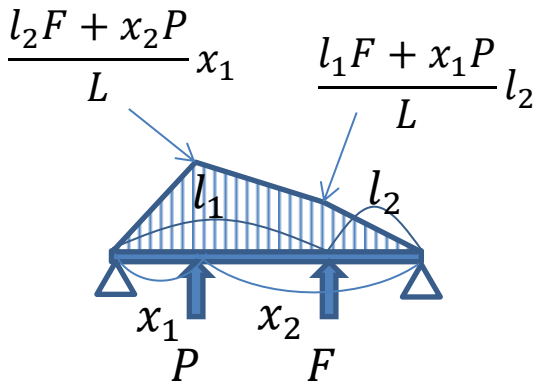
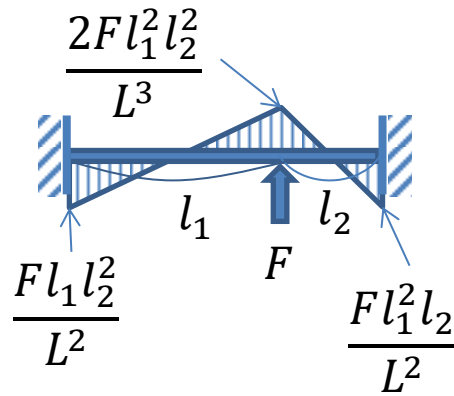
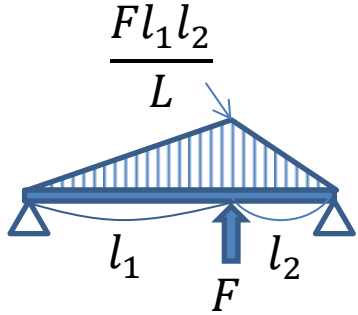
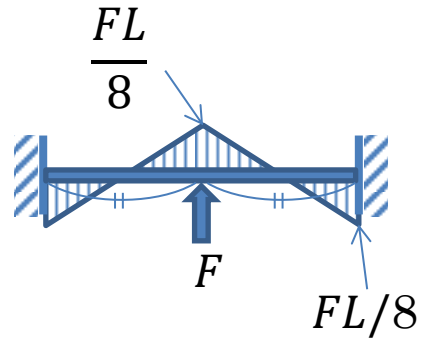
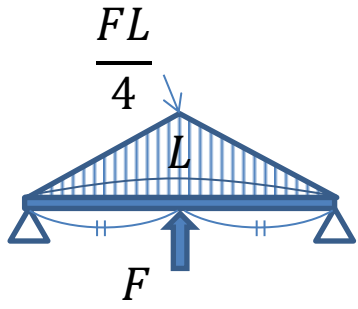


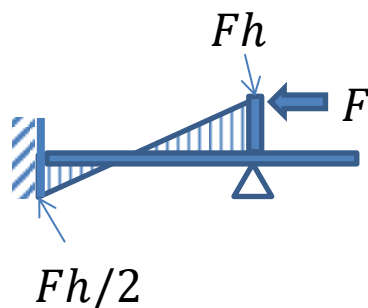
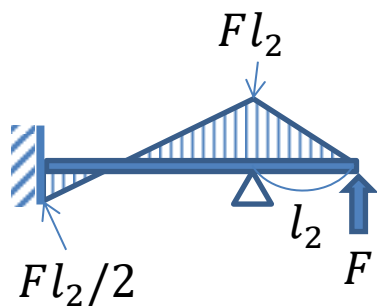
## 兩端固定梁

 <p>The diagram shows a beam of length \$L\$ fixed at both ends \$A\$ and \$B\$. A point load \$F\$ is applied at a distance \$a\$ from \$A\$ and \$b\$ from \$B\$. The shear force diagram \$Q\$ shows a constant positive shear of \$+F/2\$ from \$A\$ to \$C\$ and a constant negative shear of \$-F/2\$ from \$C\$ to \$B\$. The bending moment diagram \$M\$ shows a parabolic curve with a maximum positive moment at \$C\$ and negative moments at \$A\$ and \$B\$.</p>	$R_A = \frac{Fb^2}{L^3}(3a + b), R_B = \frac{Fa^2}{L^3}(a + 3b)$ $M_A = -\frac{Fab^2}{L^2}, M_B = -\frac{Fa^2b}{L^2}, M_C = \frac{2Fa^2b^2}{L^3}$ $\delta_C = \frac{Fa^3b^3}{3EI L^3}, a \geq b: \delta_{max} = \frac{2Fa^3b^2}{3EI(3a + b)^2}$ $a < b: \delta_{max} = \frac{2Fa^2b^3}{3EI(a + 3b)^2}$
 <p>The diagram shows a beam of length \$L\$ fixed at both ends \$A\$ and \$B\$ with a uniformly distributed load \$w\$. The shear force diagram \$Q\$ is a straight line from \$+wL/2\$ at \$A\$ to \$-wL/2\$ at \$B\$. The bending moment diagram \$M\$ is a cubic curve with a maximum positive moment at the center \$C\$ and negative moments at \$A\$ and \$B\$.</p>	$R_A = R_B = wL/2$ $M_x = \frac{w}{2}(Lx - x^2) - \frac{wL^2}{12}$ $M_A = M_B = -wL^2/12, M_C = \frac{wL^2}{24}$ $\delta_x = \frac{wL^2x^2}{24EI} \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right), \delta_C = \frac{wL^4}{384EI}$
 <p>The diagram shows a beam of length \$L\$ fixed at both ends \$A\$ and \$B\$. A uniformly distributed load \$w\$ is applied over a segment of length \$b\$, starting at distance \$a\$ from \$A\$ and ending at distance \$c\$ from \$B\$. The shear force diagram \$Q\$ shows a linear decrease from \$+wb/2\$ to \$-wb/2\$ over the load segment. The bending moment diagram \$M\$ shows a cubic curve over the load segment and linear segments elsewhere.</p>	$R_A = \frac{wb}{2L^3} \{ (b + 2c)L^2 - (a - c)(2ac + bc + ab) \}$ $R_B = wb - R_A$ $M_A = -\frac{wb}{8L^2} \left\{ (b + 2c)^2(2a + b) + \frac{b^2}{3}(2L - 6c - 3b) \right\}$ $M_B = -\frac{wb}{8L^2} \left\{ (2a + b)^2(b + 2c) + \frac{b^2}{3}(2L - 6a - 3b) \right\}$ $a < x < b: M_x = R_A x - w(x - a)^2/2 - M_A$ $a < x < b: \delta_x = \frac{1}{6EI} \left\{ 3M_A x^2 - R_A x^3 + \frac{w}{4}(x - a)^4 \right\}$
 <p>The diagram shows a beam of length \$L\$ with a point load \$F\$ at the center. The beam is supported by a roller at \$A\$, a fixed support at \$B\$, and a roller at \$C\$. The distance from \$A\$ to \$B\$ is \$L/2\$ and from \$B\$ to \$C\$ is \$L/2\$. The shear force diagram \$Q\$ shows a constant positive shear of \$+F/2\$ from \$A\$ to \$D\$ and a constant negative shear of \$-F/2\$ from \$D\$ to \$C\$. The bending moment diagram \$M\$ shows a parabolic curve with a maximum positive moment at \$D\$ and negative moments at \$B\$ and \$C\$.</p>	$R_A = \frac{13}{32}F, R_B = \frac{11}{16}F, R_C = -\frac{3}{32}F$ $M_B = -\frac{3}{32}FL, M_D = \frac{13}{64}FL$ $\delta_D = \frac{23FL^3}{1536EI}$

連続梁

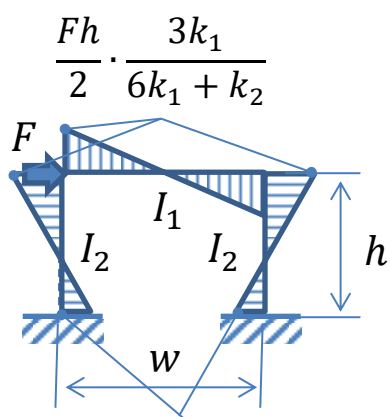
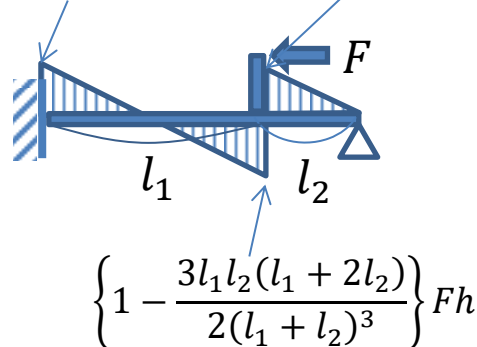
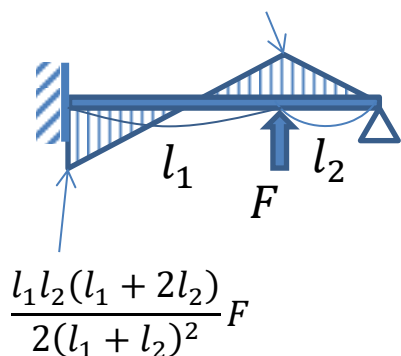
	$R_A = \frac{5}{16}F, R_B = \frac{11}{8}F, R_C = -\frac{5}{16}F$ $Q_{BD} = -Q_{BE} = -\frac{11}{16}F$ $M_B = -\frac{3}{16}FL, M_D = M_E = \frac{5}{32}FL$ $x = \frac{L}{\sqrt{5}}: \delta_{max} = \frac{FL^3}{48\sqrt{5}EI}, \delta_D = \delta_E = \frac{7FL^3}{768EI}$
	$R_A = \frac{7}{16}wL, R_B = \frac{5}{8}wL, R_C = -\frac{1}{16}wL$ $Q_{BA} = -\frac{9}{16}wL, M_B = -\frac{1}{16}wL^2$ $x_0 = \frac{7}{16}L: M_D = \frac{49}{512}wL^2$ $x = \frac{1}{2}L: \delta_D = \frac{7wL^4}{768EI}$
	$R_A = \frac{3}{8}wL, R_B = \frac{5}{4}wL, R_C = \frac{3}{8}wL$ $Q_{BA} = -Q_{BC} = -\frac{5}{8}wL, M_B = -\frac{wL^2}{8}$ $x = \frac{3}{8}L: M_D = \frac{9}{128}wL^2$ $x = 0.422L: \delta_{max} = \frac{wL^4}{185EI}$



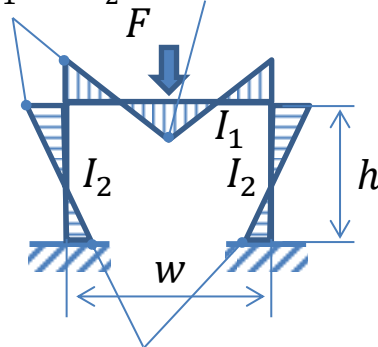


$$\frac{l_1^2 l_2 (2l_1 + 3l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} F$$

$$\left\{ 1 - \frac{3l_1(l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^2} \right\} Fh \quad \frac{3l_1 l_2 (l_1 + 2l_2)}{2(l_1 + l_2)^3} Fh$$



$$\frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2} \quad \frac{Fw}{4} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 + 2k_2}$$



$$\frac{Fh}{2} \cdot \frac{3k_1 + k_2}{6k_1 + k_2}$$

$$k_1 = \frac{EI_1}{w}$$

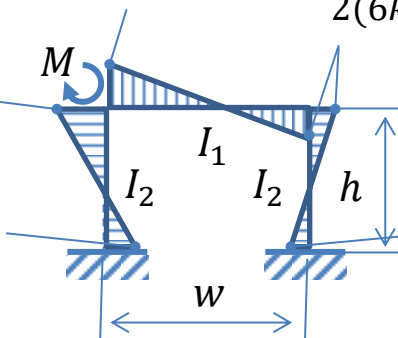
$$k_2 = \frac{EI_2}{h}$$

$$\frac{Fw}{8} \cdot \frac{k_2}{k_1 + 2k_2}$$

$$\frac{(12k_1 + 13k_2)k_1 M}{2(6k_1^2 + 13k_1 k_2 + 2k_2^2)}$$

$$\frac{-11k_1 k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1 k_2 + 2k_2^2)}$$

$$\frac{(13k_1 + 4k_2)k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1 k_2 + 2k_2^2)}$$

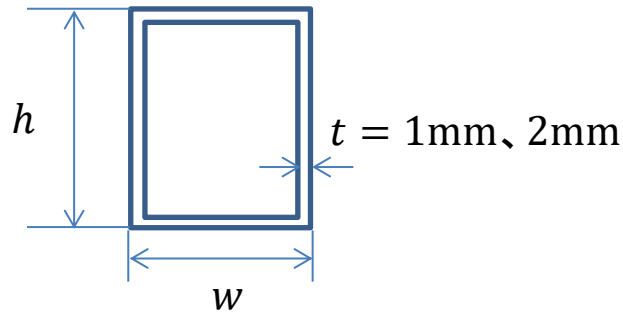


$$\frac{(-5k_1 + k_2)k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1 k_2 + 2k_2^2)}$$

$$\frac{(7k_1 + 3k_2)k_2 M}{2(6k_1^2 + 13k_1 k_2 + 2k_2^2)}$$

強度入力が必要な断面の見積もり

断面の縦曲げモーメントと横曲げモーメントから、必要な矩形断面 ( $t = 1.0\text{mm}$ 、 $2.0\text{mm}$ ) のサイズを見積もる手順を整理します。



手順

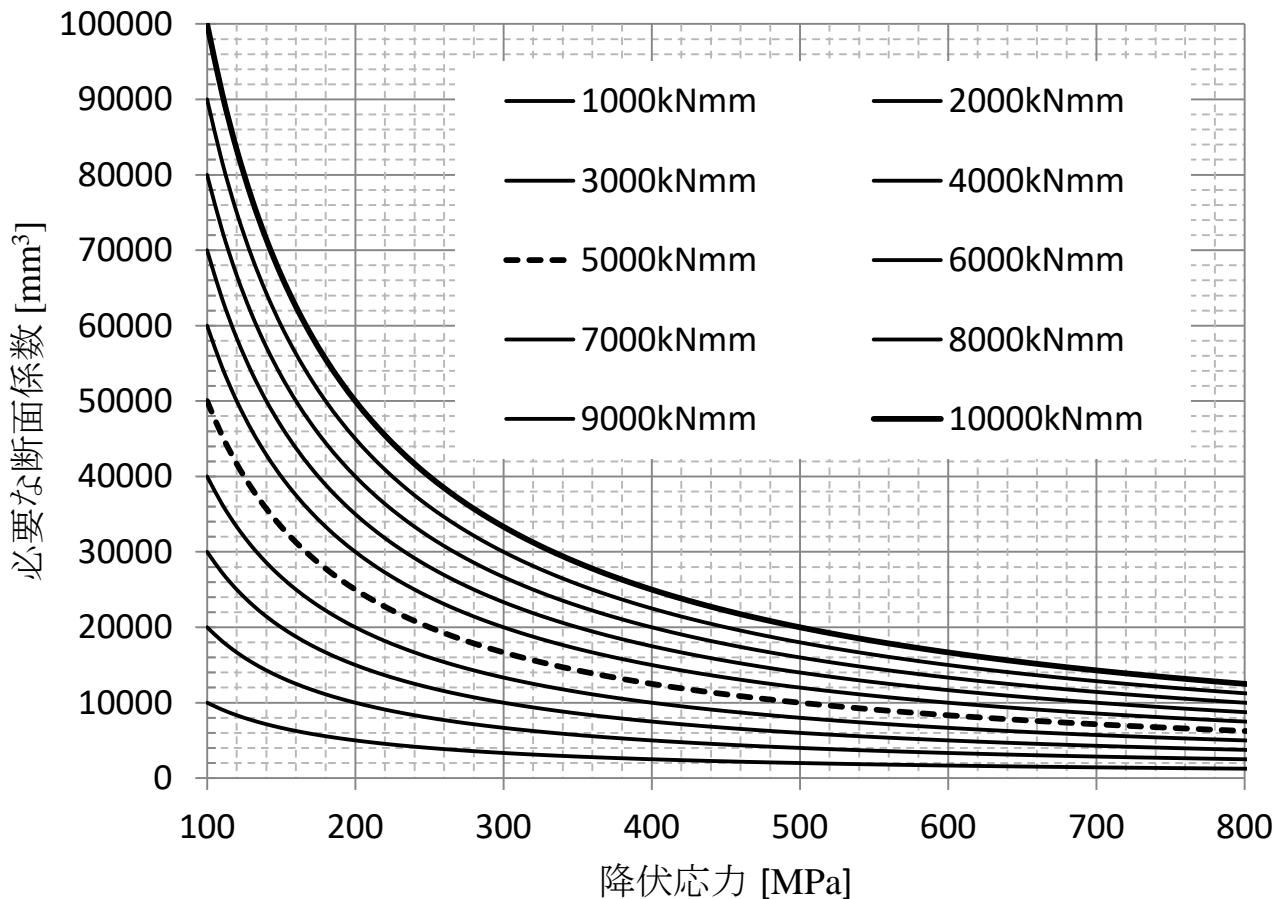
0. 断面の曲げモーメントを計算する (前ページ参照)
1. 縦曲げと横曲げで必要な断面係数をグラフから読み取る
2. 必要な断面係数を有する断面寸法をグラフから読み取る

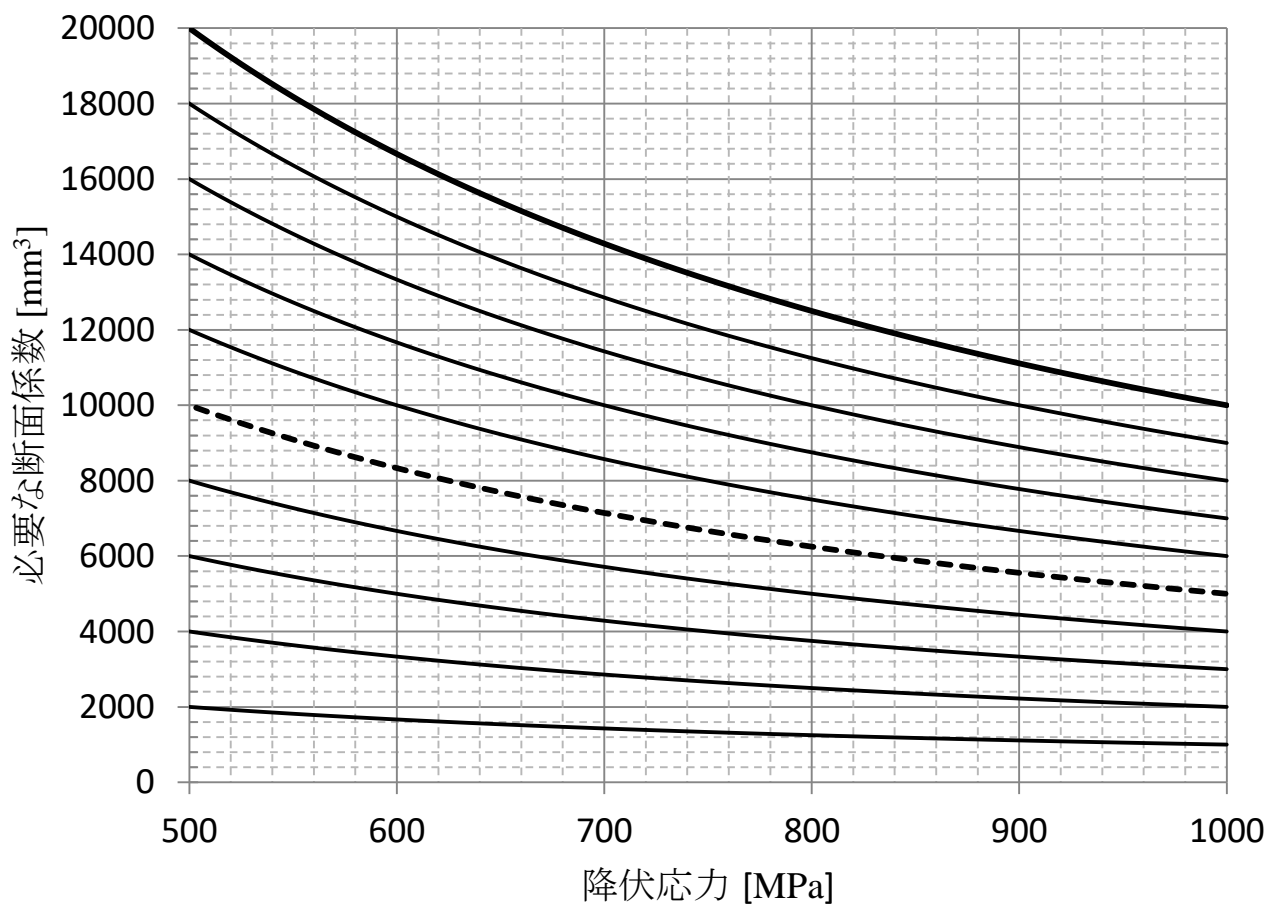
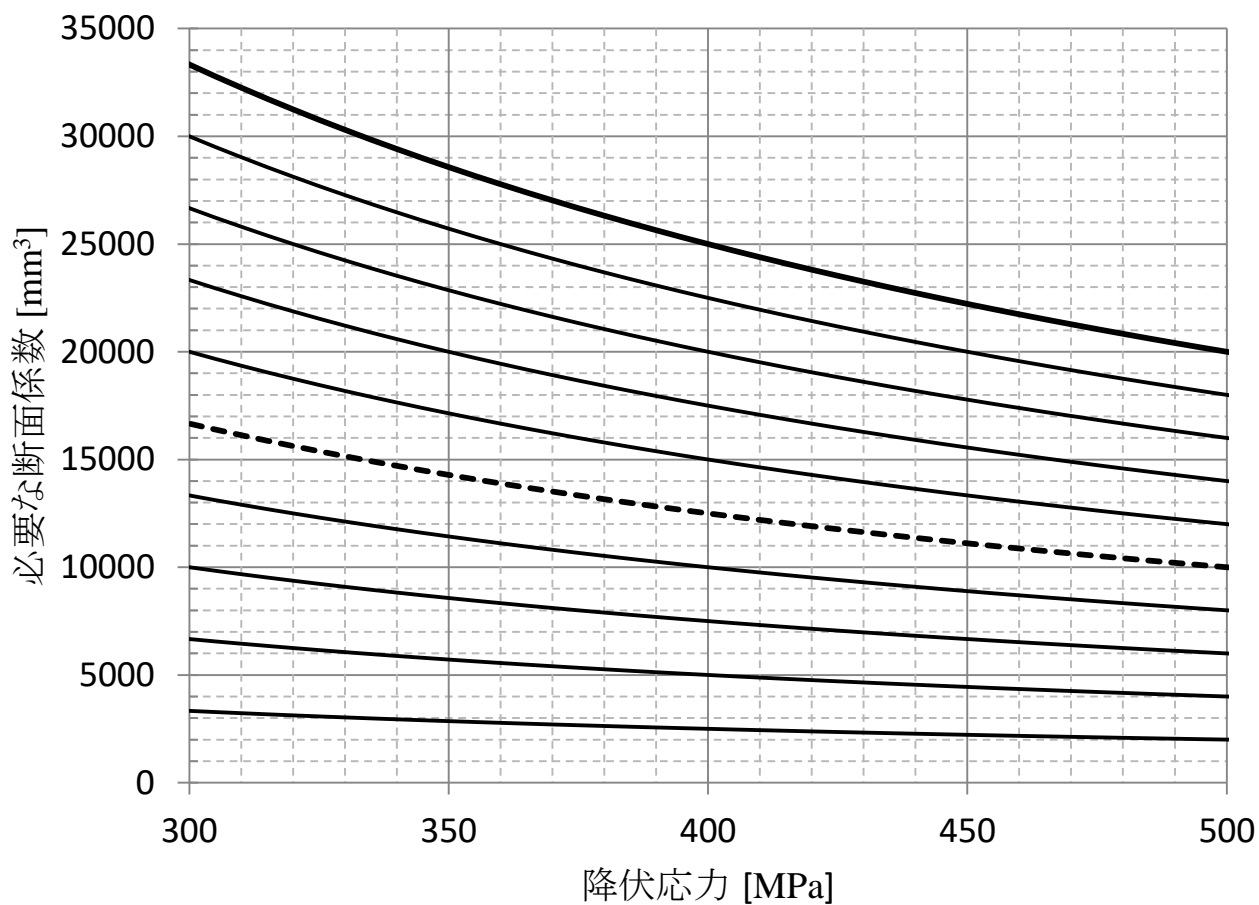
$$\text{断面係数 (弾塑性境界)} \quad Z = \frac{I}{h/2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\{wh^3 - (w-2t)(h-2t)^3\}}{h}$$

$$\text{塑性断面係数 (全断面塑性)} \quad Z_p = wt(h-t) + \frac{t}{2}(h-2t)^2$$

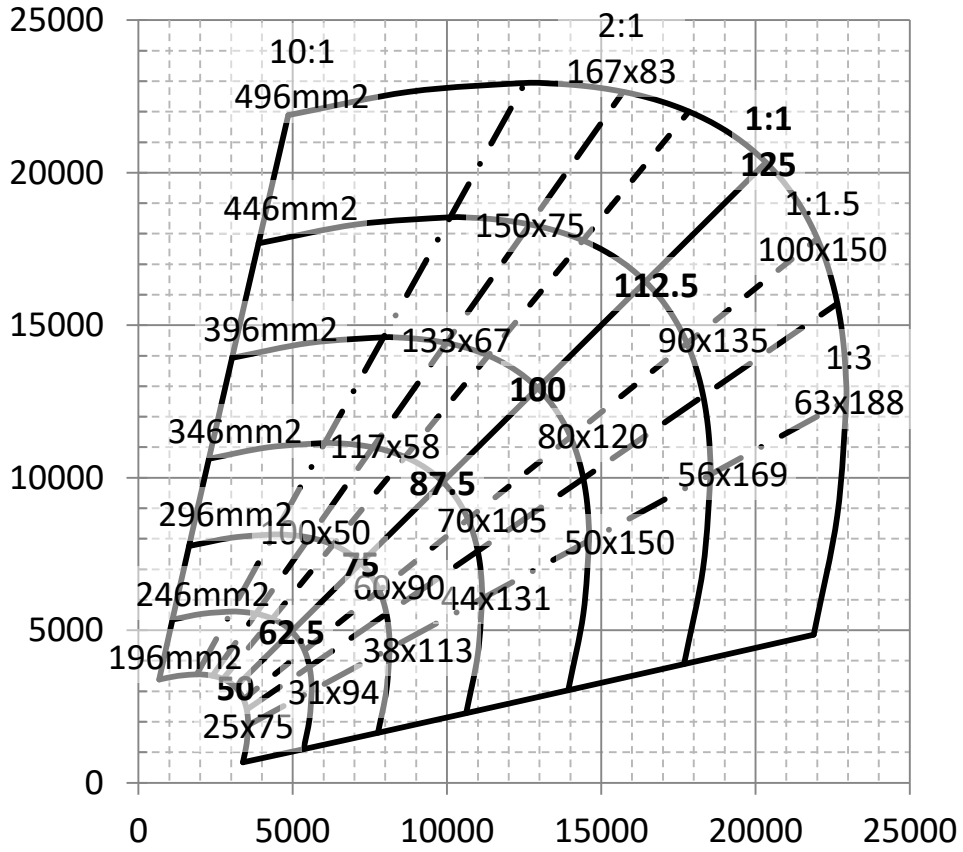
3. 断面寸法が有効幅以下であることを確認する

曲げモーメントに対して必要な断面係数

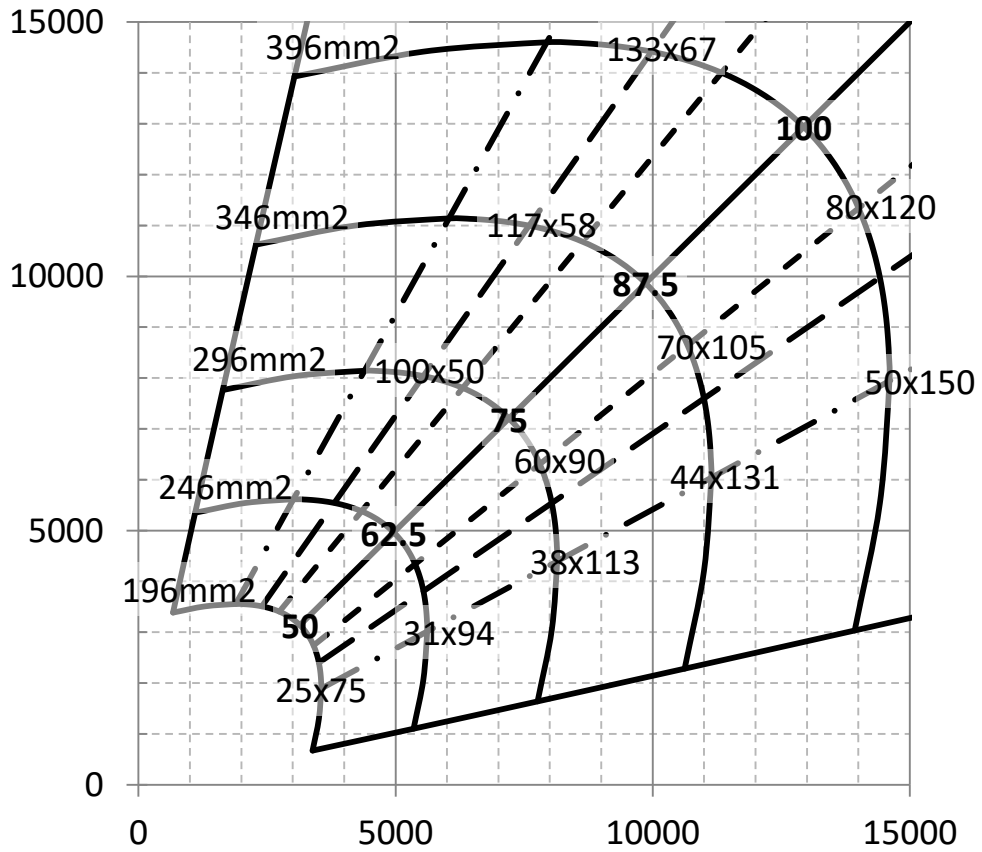


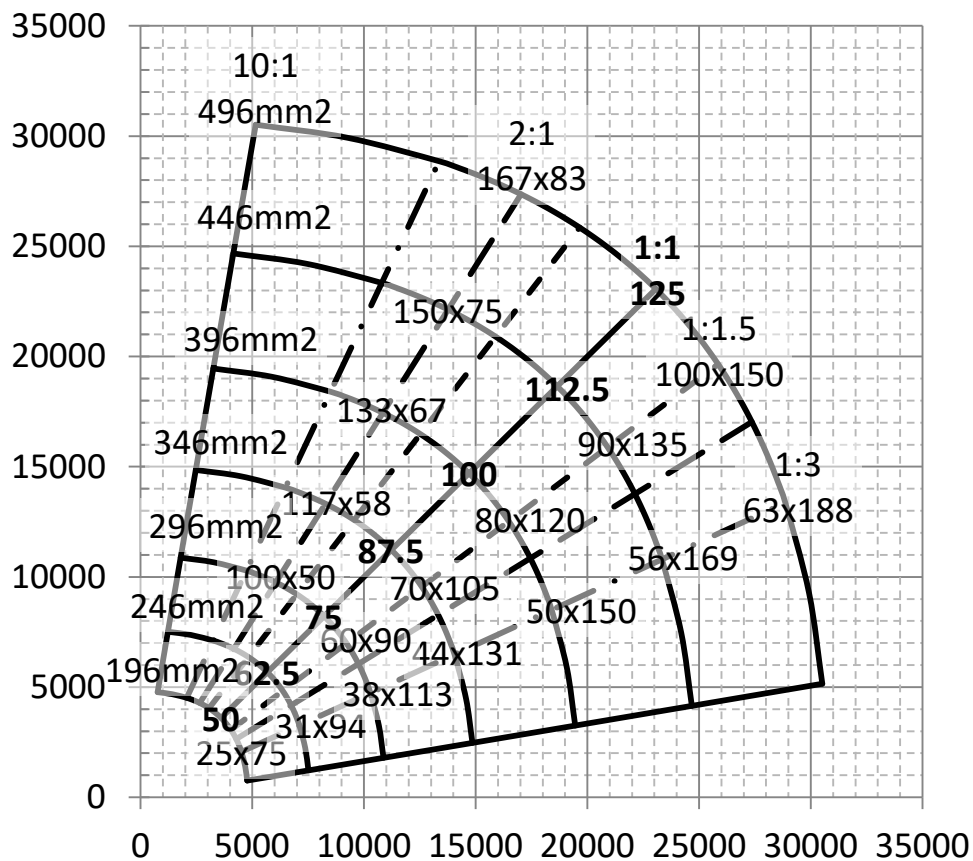


断面係数 ( $t = 1.0\text{mm}$ ) [ $\text{mm}^3$ ]

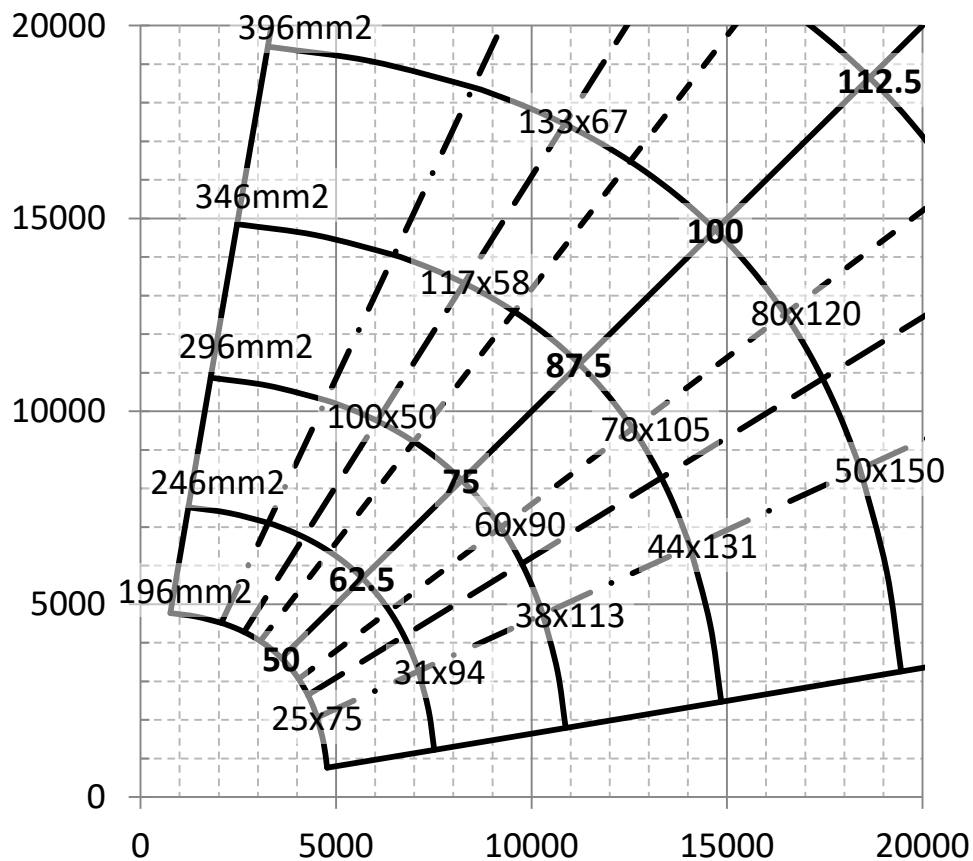


上図の拡大



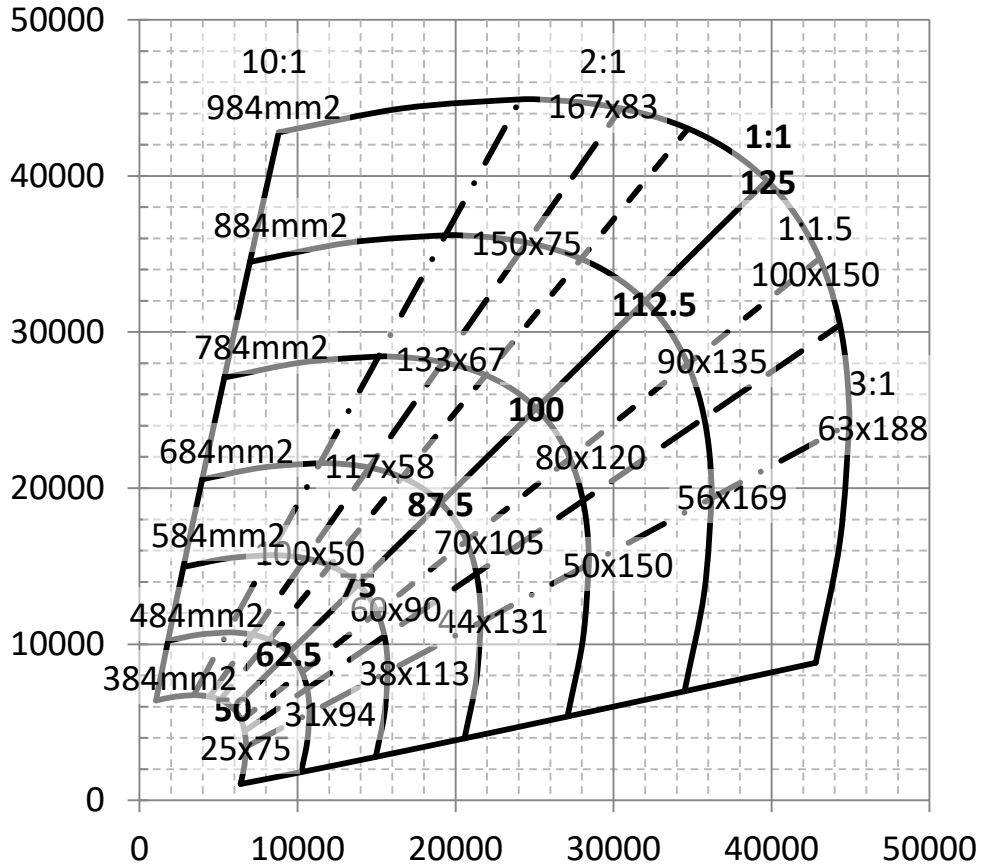
塑性断面係数 ( $t = 1.0\text{mm}$ ) [ $\text{mm}^3$ ]

上図の拡大

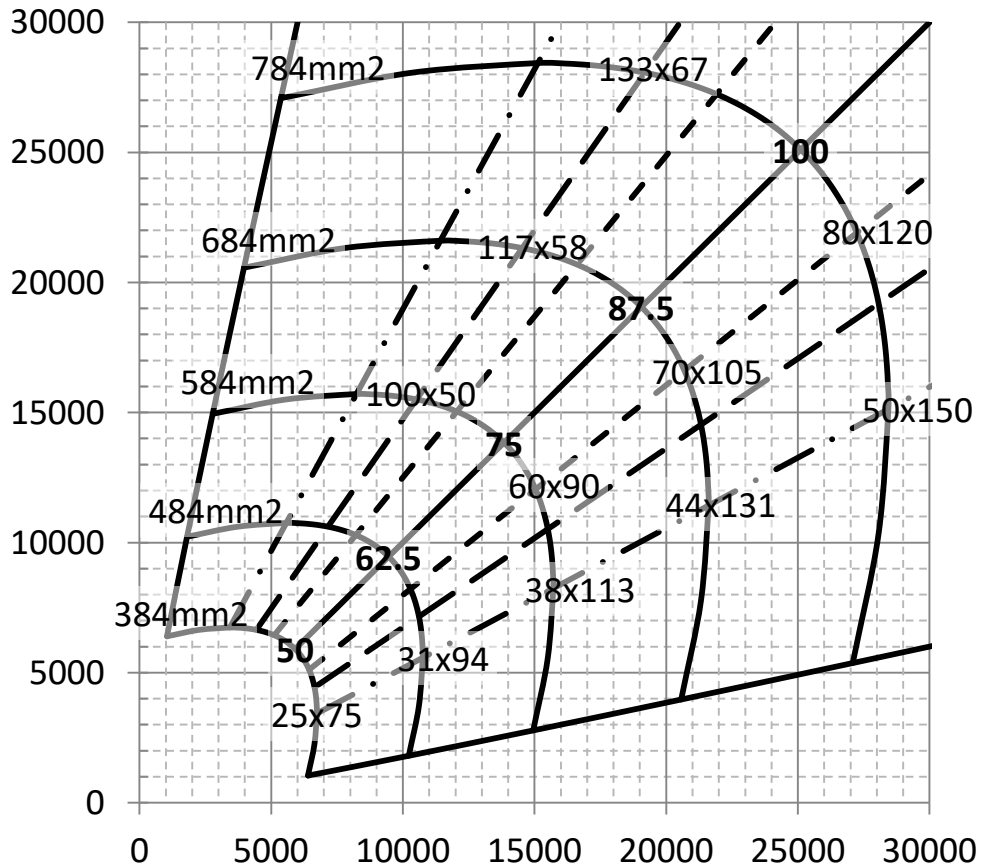




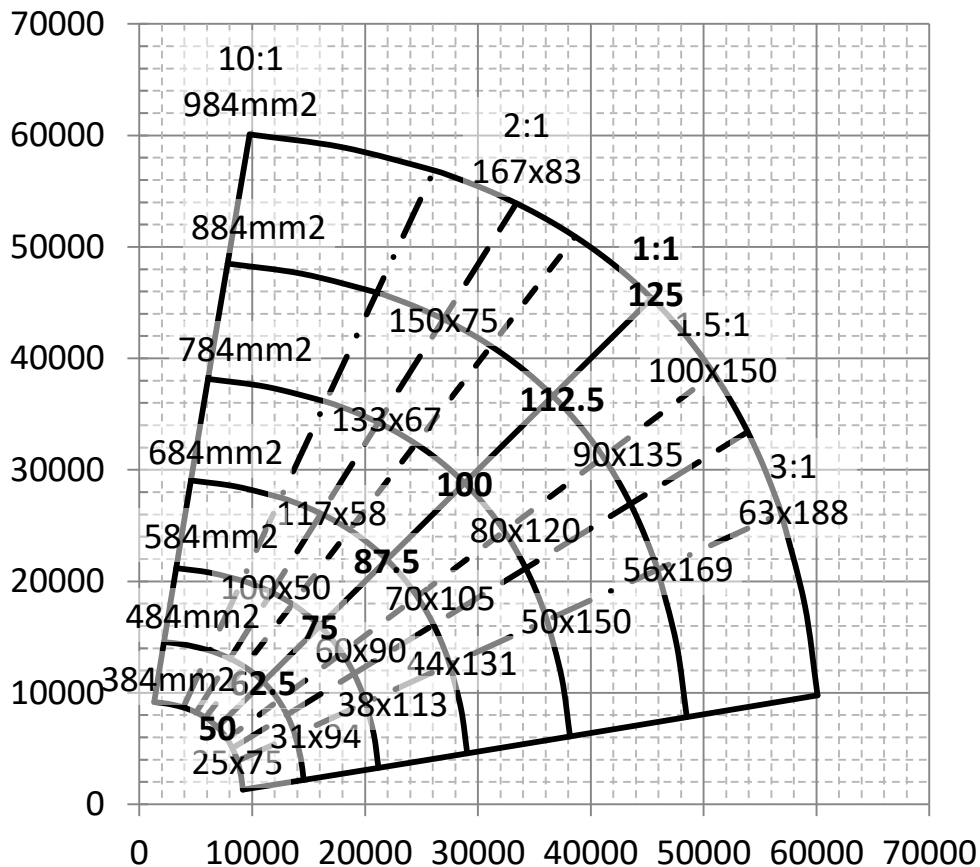
断面係数 ( $t = 2.0\text{mm}$ ) [ $\text{mm}^3$ ]



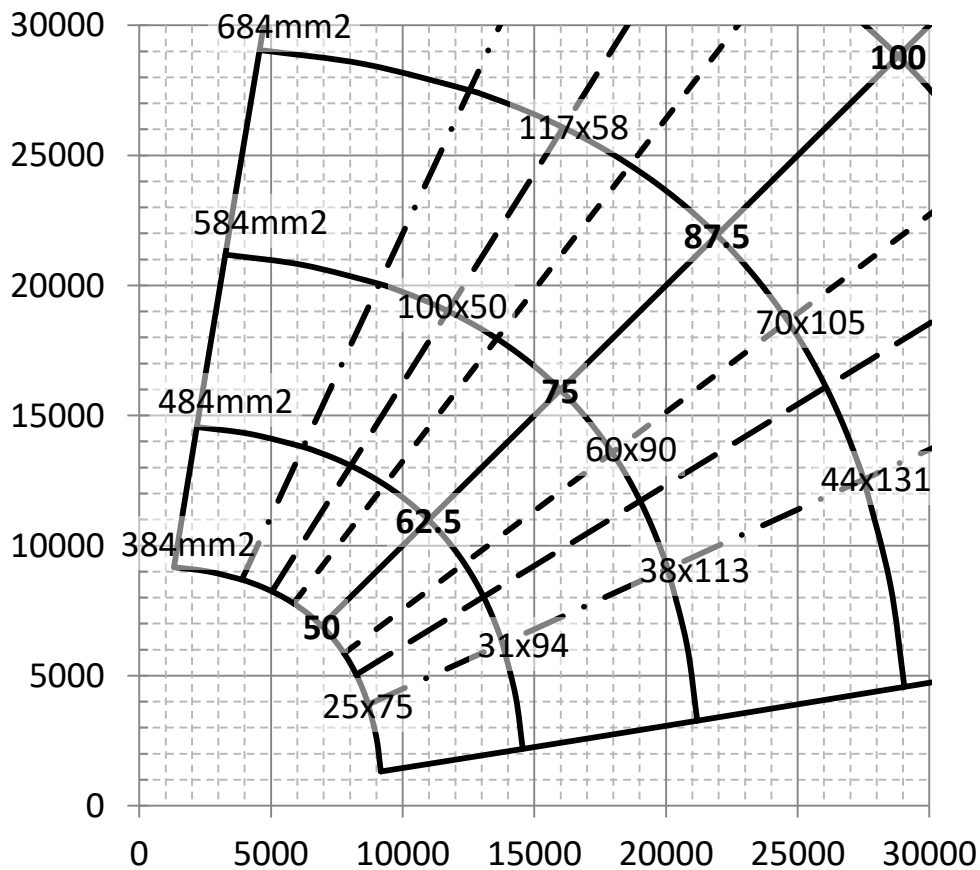
上図の拡大



塑性断面係数 (t = 2.0mm) [mm<sup>3</sup>]



上図の拡大



## カルマンの有効幅

一般に圧縮を受ける平板は、弾性座屈応力 $\sigma_{cr}$ に達すると座屈して曲率を生じます。曲率を持った部分は圧縮力に対し、断面が面外方向に逃げるように変形するため応力を受け持つことができなくなります。

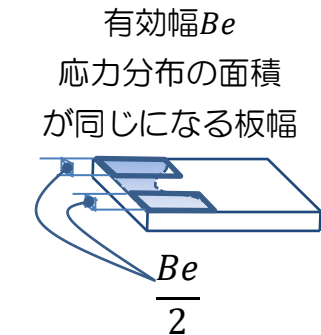
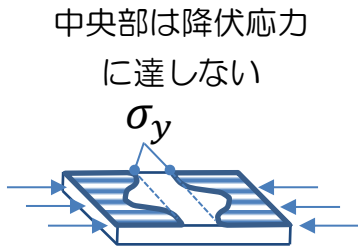
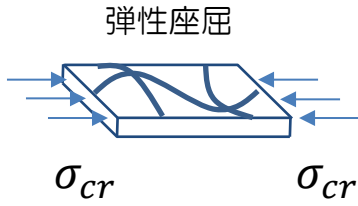
この応力の低下を平板の有効長さに置き換えたものがカルマン(Ka'rma'n)の有効幅です。カルマンの有効幅理論によると弾性座屈応力 $\sigma_{cr}$ は

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

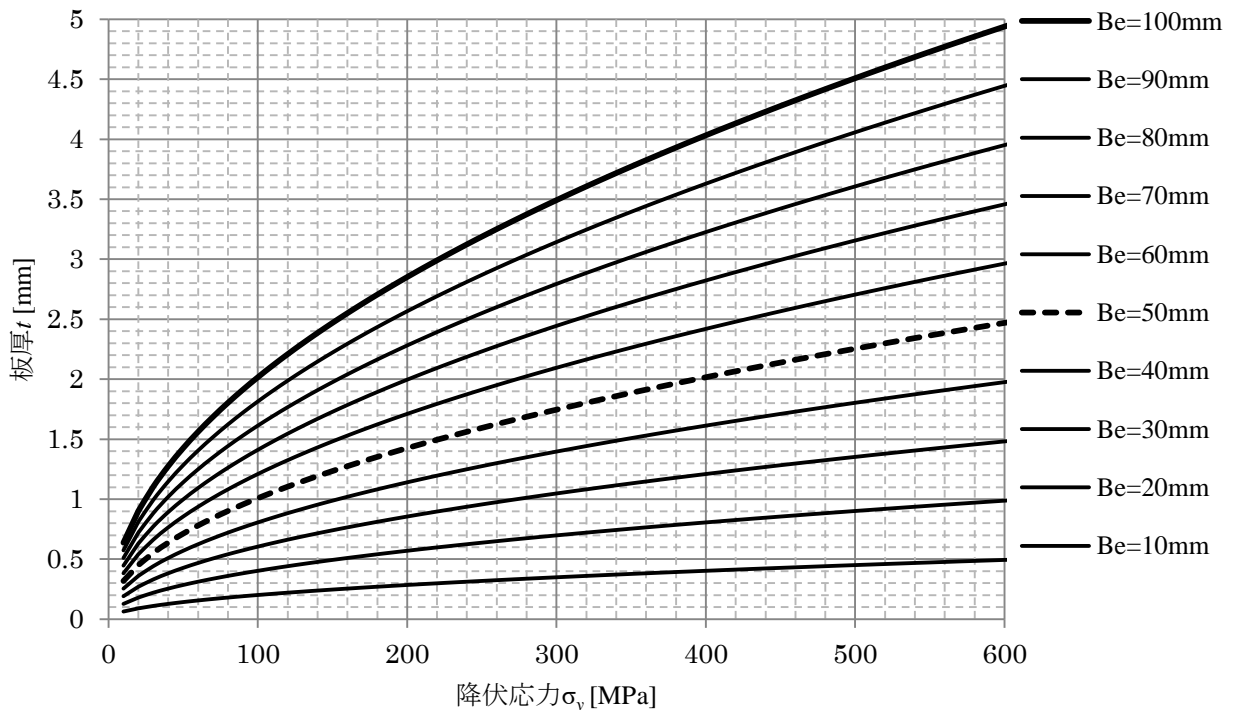
と表され、面が降伏応力 $\sigma_y$ に達した時の有効幅 $Be$ は

$$Be = t \cdot \pi \sqrt{\frac{kE}{12(1-\nu^2)\sigma_y}}$$

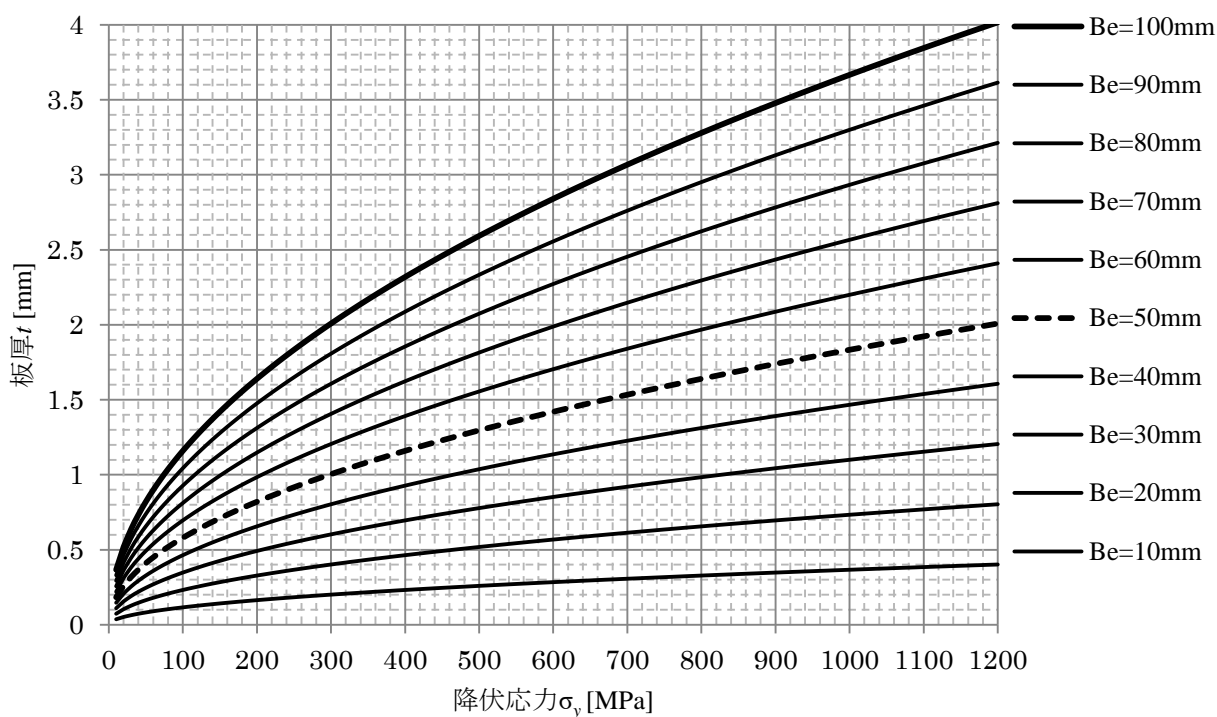
と計算されます。ここで $k$ 値は平板の境界の拘束条件で変化します。一般的に、回転自由の単純支持の場合 $k = 4$ で計算を行います。



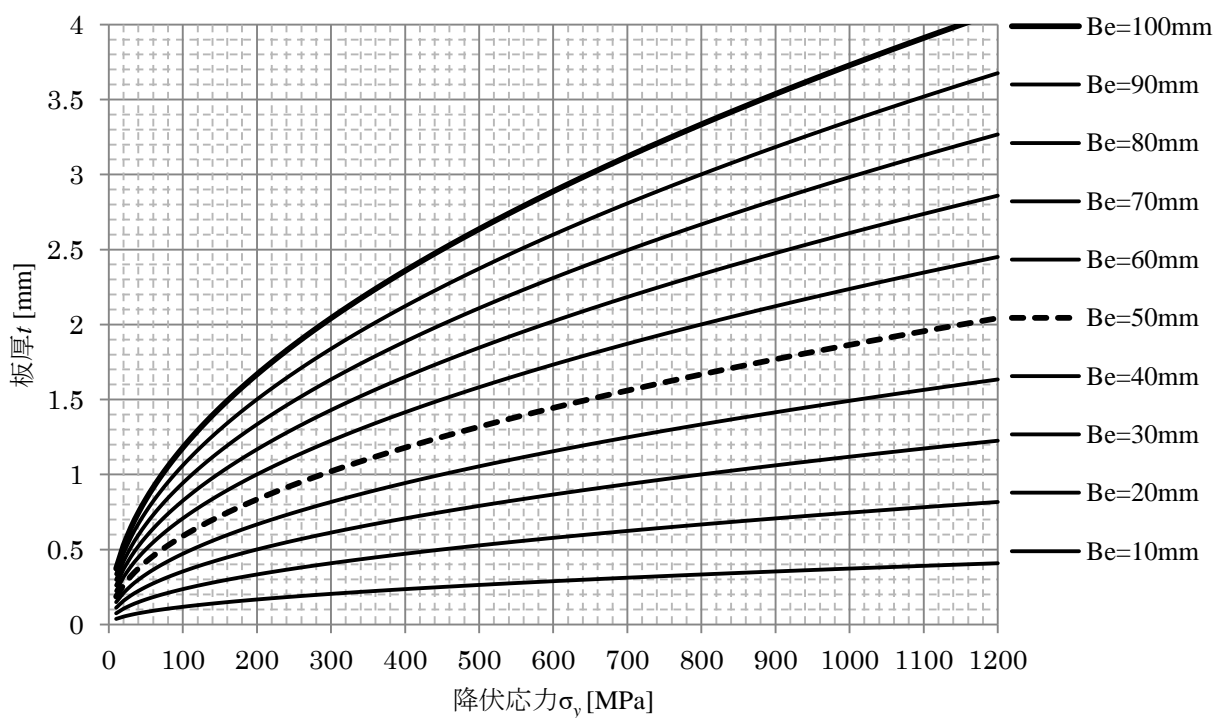
純アルミニウム A1100-H18 ( $k = 4$   $E = 69\text{GPa}$   $\nu = 0.28$ )



低炭素鉄 ( $k = 4$   $E = 206\text{GPa}$   $\nu = 0.30$ )



中炭素鉄 ( $k = 4$   $E = 205\text{GPa}$   $\nu = 0.25$ )





## 単位変換

## 長さ

メートル	インチ	フート	ヤード		
1	39.37	3.281	1.094		

キロメートル	マイル	海里			
1	0.6214	0.5400			

## 体積

リットル	米ガロン	英ガロン			
1	0.2642	0.2200			

## 質量

キログラム	ポンド	オンス			
1	2.205	35.27			

## 力

ニュートン	キログラムフォース				
9.807	1				

## 燃費

km/ℓ	ℓ/100km	米 mpg	英 mpg		
1	100	2.352146	2.82481		
21.26	4.70	50.00	60.05		
33.33	3.00	78.40	94.16		
40.00	2.50	94.09	112.99		

## 速度

km/h	米 mph				
60	37.282				
100	62.137				
160.934	100				

# 索引

	ステア特性..... 114, 127
<b>あ</b>	<b>け</b>
安全率.....195, 199	減衰比..... 27
<b>い</b>	<b>こ</b>
陰解法.....94	コーナーリングスティフネス..... 111
インパルス応答.....31	コーナーリングフォース..... 111
<b>お</b>	固有振動数..... 3
オイラーの公式.....11	固有値..... 3
オイラー法.....96	固有ベクトル..... 79
オットーサイクル.....275	コンパクト断面..... 195, 198
<b>か</b>	<b>さ</b>
荷重移動	最終値定理..... 120, 121, 126
前後輪の荷重移動.....97	<b>し</b>
内外輪の荷重移動.....151	質点モデル
片持ち梁.....155, 162, 165, 167	2質点モデル..... 55, 58, 220
カルマンの有効幅.....198	3質点モデル..... 69, 72
慣性力.....4, 225	<b>す</b>
<b>き</b>	スカッフ変化..... 150
逆行列.....41	スクラブ半径..... 144
キャスター角.....144	スタティックマージン..... 114
キャスタートレール.....144	ステップ関数..... 7
キャンバー角.....144, 149	<b>せ</b>
キャンバストラスト.....150	セルフアライニングトルク..... 112
共振周波数..... 3	せん断ひずみエネルギー説..... 198
強制変位入力.....40	<b>た</b>
許容応力設計法.....195	対数減衰率..... 28
キングピン軸.....112, 144	ダイナミックダンパー..... 72, 75
<b>く</b>	単純支持梁..... 156
車の	弾性主軸..... 237
運動方程式.....117, 135, 137, 139	

ち	
置換積分 .....	16, 31

て	
定圧モル熱容量 .....	265
定常円旋回 .....	127
定積モル熱容量 .....	263
ディラックのデルタ関数 .....	32
伝達関数 .....	30
伝達関数合成法 .....	73

と	
ト一角 .....	144, 145, 147

に	
ニュートラルステアポイント .....	113
ニューマークの $\beta$ 法 .....	94, 124
ニューマチックトレール .....	144

は	
バウンド側 .....	147
梁のたわみの式 .....	159
反発係数 .....	223

ひ	
比熱比 .....	261

ふ	
フーリエ積分 .....	13
フーリエ変換 .....	8, 11
Von-Mises 応力 .....	198
部分積分 .....	19
部分分数分解 .....	21

へ	
ベティの相反定理 .....	231

ほ	
防振効果 .....	55, 59
ボルツマン定数 .....	258

ま	
マクスウェル・ボルツマン分布 .....	259
マクスウェルの相反定理 .....	234
摩擦円 .....	97

み	
未定係数法 .....	5

も	
モード解析 .....	79

よ	
陽解法 .....	96, 220
横力コンプライアンスステア .....	143, 145, 146
横力トーアウト .....	145
横力トーイン .....	145

ら	
ラプラス変換 .....	18, 19
ランプ関数 .....	25

り	
リバウンド側 .....	147
臨界減衰係数 .....	28
リンク機構 .....	143

ろ	
ロールキャンパー .....	149
ロールステア .....	147
ロピタルの定理 .....	32, 120



## 謝辞

真実を探求することへの熱意と真摯さを教えてくださった学生時代の恩師、辛抱強く教え育んでくださった先輩、同僚に心から感謝いたします。

また、自動車物理ノートの技術的内容に関して、多くの知識やテーマを与えて下さり、現在も継続してご指導いただいている、大神さん、則包さん、奥村さん、本庄さん、土井さん、岡原さん、関城さん、菅谷さん、上原さん、山田さん、河井さん、景山さん、金子さん、岩堀さん、神山さん、水野さん、水田さん、井筒さん、東山さん、太田さん、山辺さん、畠さん、田中さん、恒石さんに、心より感謝いたします。

最後に、この奥深い業界に誘い、互いに教え合い、物理ノートの内容を何度も読み返し完成度を高めてくれた友人、挿絵を描いた妻に感謝します。