1.4. 運動方程式の立て方、解き方

一般に、運動方程式は質量マトリクスM、減衰マトリクスC、剛性マトリクスKを用いて

$$M\{\ddot{x}\}+C\{\dot{x}\}+K\{x\}=\{F\}e^{i\omega t} \tag{1.129}$$

と表されます。未定係数法より$\{x\}=\{X\}e^{i\omega t}$と置いて上式を整理すれば、振動振幅$\{X\}$は次のように求められます。

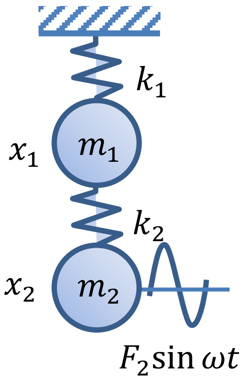
$$\begin{gathered}(-\omega^2 M+i\omega C+K)\{X\}e^{i\omega t}=\{F\}e^{i\omega t}\\ \{(-\omega^2 M+K)+i(\omega C)\}\{X\}=\{F\}\\ \{X\}=\{(-\omega^2 M+K)+i(\omega C)\}^{-1}\{F\}\end{gathered} \tag{1.130}$$

上記手順の中で、手間がかかるのは

1． 運動方程式を立てること
2． 逆行列を計算すること

です。この節では、運動方程式を簡単に立てる方法と、複素数を含む行列の逆行列の計算方法を簡単に整理しておきます。

1.4.1.運動方程式の立て方



運動方程式をミスなく、機械的に組み上げる方法があります。この方法は、１度意味を知った後は、そういうものだと思って使えば非常に便利です。図(欄外)のような２質点のばねマスの運動方程式で説明しますが、多自由度でも同じです。

$$\begin{gathered}m_1\ddot{x_1}+k_2(x_1-x_2)+k_1x_1=0\\ m_2\ddot{x_2}+k_2(x_2-x_1)=F_2\sin\omega t\end{gathered} \tag{1.131}$$

上式において、質点間に連結されたばねk_2は、相対距離に比例した反力を発生することを表しています。また、接地されたばねk_1は、質点m_1の変位に比例した反力を発生します。上式を行列で書き直し、ばね要素k_1、k_2を分けて表すと

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x_1}\\ \ddot{x_2}\end{Bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ F_2\sin\omega t\end{Bmatrix} \tag{1.132}$$

となります。上式より質点間に連結されたばね要素は

$$\text{ばね要素}\begin{bmatrix}k & \cdots & -k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -k & \cdots & k\end{bmatrix} \tag{1.133}$$

と表され、相対距離に比例した反力が２つの質点に働くことを表現していることがわかります。一方、接地されたばね要素は

$$\text{接地されたばね要素}\quad\begin{bmatrix}\ddots & \vdots & \iddots\\ \cdots & k & \cdots\\ \iddots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}\qquad(1.134)$$

と表されます。減衰要素も同様の考え方で組み上げることができます。

1.4.2.強制変位入力の与え方

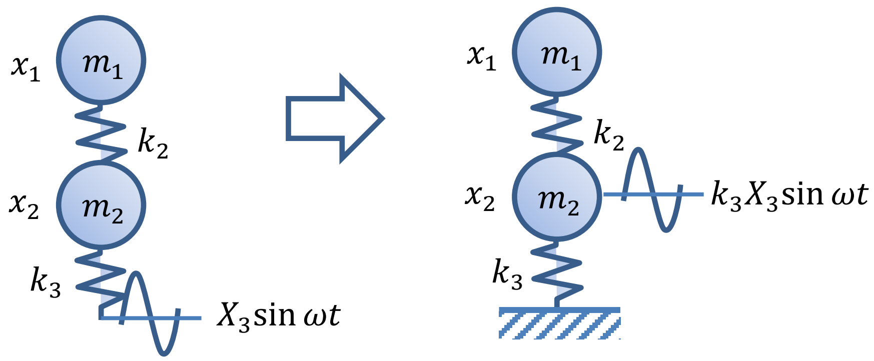
強制変位入力の与え方を考えます。例えば、下図のように周期的に波打つ路面の変位$x_3 = X_3\sin\omega t$が、ばねk_3を介して２質点のばねマスモデルに入力される場合、その運動方程式は

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x_1} + k_2(x_1 - x_2) &= 0\\ m_2\ddot{x_2} + k_2(x_2 - x_1) &= k_3(X_3\sin\omega t - x_2)\end{aligned}\qquad(1.135)$$

と表されます。上式を行列で書き直して整理すると

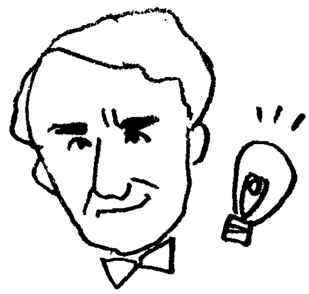
$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x_1}\\ \ddot{x_2}\end{Bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix}k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & k_3\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ k_3X_3\sin\omega t\end{Bmatrix}\qquad(1.136)$$

となります。結果として強制変位入力は、入力点をばね要素k_3で接地し、ばね定数k_3に比例した力$k_3X_3\sin\omega t$を質点m_2に与えればよいことになります。



トーマス・エジソン

あらゆるものには輝くダイヤが隠されている。磨けば光る。



1.4.3.減衰を含む運動方程式の解き方

一般に、運動方程式は質量マトリクスM、減衰マトリクスC、剛性マトリクスKを用いて

$$M\{\ddot{x}\}+C\{\dot{x}\}+K\{x\}=\{F\}e^{i\omega t} \tag{1.137}$$

と表されます。未定係数法より$\{x\}=\{X\}e^{i\omega t}$と置いて上式を整理すれば、振動振幅$\{X\}$は次のように求められます。

$$\begin{aligned}(-\omega^2M+i\omega C+K)\{X\}e^{i\omega t}&=\{F\}e^{i\omega t}\\ \{(-\omega^2M+K)+i(\omega C)\}\{X\}&=\{F\}\\ \{X\}&=\{(-\omega^2M+K)+i(\omega C)\}^{-1}\{F\}\end{aligned} \tag{1.138}$$

上式を計算するには複素数iが含まれる行列の逆行列を求める必要があります。ここで、上式の実部と虚部を

$$\begin{aligned}-\omega^2M+K&\equiv A\\ \omega C&\equiv B\end{aligned} \tag{1.139}$$

と置きかえ、$A+Bi$の逆行列を$\alpha+\beta i$とすると

$$(A+Bi)(\alpha+\beta i)=1 \tag{1.140}$$

の関係があります。上式を実数と虚部に分けると

$$A\alpha-B\beta+(A\beta+B\alpha)i=1 \tag{1.141}$$

となります。ここで、上式を恒等式として考えれば

$$A\alpha-B\beta=1 \tag{1.142}$$

$$A\beta+B\alpha=0 \tag{1.143}$$

の関係からαとβを求めることができます。式(1.143)より

$$\beta=A^{-1}(-B\alpha) \tag{1.144}$$

上式を式(1.142)に代入することで

$$\begin{aligned}A\alpha+BA^{-1}B\alpha&=1\\ (A+BA^{-1}B)\alpha&=1\\ \alpha&=(A+BA^{-1}B)^{-1}\end{aligned} \tag{1.145}$$

αをAとBで表現することができました。上式を式(1.144)に代入すれば

$$\begin{aligned}\beta&=A^{-1}(-B\alpha)\\ &=-A^{-1}B(A+BA^{-1}B)^{-1}\end{aligned} \tag{1.146}$$

となり、$A+Bi$の逆行列$\alpha+\beta i$が求められます。以上より、式(1.138)の３行目の逆行列は次のように置き換えられ、振動振幅$\{X\}$を求めることができます。

$$\begin{aligned}\{X\}&=\{A+Bi\}^{-1}\{F\}\\ &=(\alpha+\beta i)\{F\}\\ &=\{(A+BA^{-1}B)^{-1}+i(-A^{-1}B(A+BA^{-1}B)^{-1})\}\{F\}\end{aligned} \tag{1.147}$$